

Institut für Computergraphik
und Algorithmen
Technische Universität Wien

Karlsplatz 13/186/2
A-1040 Wien
AUSTRIA

Tel: +43 (1) 58801-18649
Fax: +43 (1) 58801-18698

Institute of Computer Graphics
and Algorithms
Vienna University of Technology

email:
technical-report@cg.tuwien.ac.at

other services:
<http://www.cg.tuwien.ac.at/>
<ftp://ftp.cg.tuwien.ac.at/>

Über den Schnitt zweier Linearer Intervallabschätzungen

Katja Bühler

TR-186-2-01-07

March 2001

Abstract

Lineare Intervallabschätzungen (LIEs) für parametrische Flächen sind parametrisierte Einschließungskörper, die in [Bühler, Barth '01] im Zusammenhang mit einem Schnittalgorithmus für parametrische Flächen eingeführt wurden. Diese Arbeit enthält die Sätze und Beweise, die die Grundlage für den in [Bühler, Barth '01] erwähnten Schnitttest mit automatischer Parametergebietsreduzierung bilden.

Keywords: Linear Interval Estimations, LIE, intersection, parameter domain pruning, bounding volumes, parametric surfaces.

1 Einleitung

LIEs sind parametrische Intervallebenenstücke, also Parallelogramme im \mathbb{R}^3 , die statt aus Punkten aus einer Menge von Intervallpunkten bestehen. In dieser Arbeit wird deshalb zunächst ein Algorithmus entwickelt, der mit Hilfe von Intervallarithmetic das Schnittgeradensegment zweier gewöhnlicher Parallelogramme im Raum berechnet. Die Parallelogramme werden als Stücke parametrischer Ebenen dargestellt, ihr Schnitt als parametrisches Geradenstück. Der Algorithmus berechnet neben einer parametrischen Darstellung dieses Geradenstücks auch die Parametergebiete, die das Geradensegment enthalten. Es wird außerdem gezeigt, daß in diesem Fall die Anwendung der Intervallarithmetic nicht zu Überschätzungen führt, sondern ein bis auf Rundungsfehler exaktes Ergebnis liefert. Der für gewöhnliche Parallelogramme entwickelte Algorithmus wird dann auf den Schnitt zweier LIEs übertragen und führt zu einem neuen Algorithmus, der eine relativ enge achsenparallele Einschließung des Schnittes berechnet. Im Anhang befinden sich kurze Überblicke über die Grundlagen der Intervallarithmetic, der affinen Arithmetik und der Taylor Modelle, die für das Verständnis und die Beweisführung wichtig sind.

2 Lineare Intervallabschätzungen

2.1 Allgemeine Definition

Definition 1 Die Intervallebene

$$\mathbb{L}(u, v) = \mathfrak{p} + u^* \mathbf{y}_1 + v^* \mathbf{y}_2, \quad (u^*, v^*) \in I_u^* \times I_v^* = \mathbb{I}^* \in \mathbb{IR}^2 \quad (1)$$

mit $\mathfrak{p} \in \mathbb{IR}^3$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^3$ heißt lineare Intervallabschätzung (LIE) des parametrischen Flächenpatches

$$\mathbf{f}(u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{I} \in \mathbb{IR}^2$$

falls eine bijektive und stetig differenzierbare Abbildung

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{I} & \rightarrow \mathbb{I}^* \\ (u, v) & \mapsto \phi(u, v) := (u^*(u), v^*(v)) \end{cases}$$

existiert, so daß für alle $(u, v) \in \mathbb{I}$ gilt

$$\mathbf{f}(u, v) \in \mathbb{L}(\phi(u, v)) = \mathbb{L}(u^*(u), v^*(v)).$$

Zu jedem Punkt des Flächenpatches existiert also ein Intervallpunkt der linearen Intervallabschätzung, der den Flächenpunkt enthält.

Durch die zulässige Parametertransformation

$$\phi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{I}^* & \rightarrow \mathbb{I} \\ (u^*, v^*) & \mapsto (u, v) := \phi^{-1}(u^*, v^*) = \begin{pmatrix} \frac{u_2 - u_1}{u_2^* - u_1^*} u^* + \frac{u_1 u_2^* - u_2 u_1^*}{u_2^* - u_1^*} \\ \frac{v_2 - v_1}{v_2^* - v_1^*} v^* + \frac{v_1 v_2^* - v_2 v_1^*}{v_2^* - v_1^*} \end{pmatrix} \end{cases}$$

kann man erreichen, daß sich die Parametrisierungen der Fläche und der LIE entsprechen, d.h. es gilt:

$$\mathbf{f}(u, v) \in \mathbb{L}(u, v), \quad \text{für alle } (u, v) \in \mathbb{I} \quad (2)$$

2.2 Berechnung linearer Intervallabschätzungen als Taylormodell 2.Grades

Definition 2 Sei $f : \mathbb{I} \mapsto \mathbb{R}^3$ $n + 1$ -mal stetig differenzierbar auf $\mathbb{I} \in \mathbb{IR}^2$ und sei $T_{u_0, v_0}(u, v)$ das bivariate Taylorpolynom n -ten Grades von f um (u_0, v_0) dann heißt

- ein Intervallvektor $\mathbb{J} \in \mathbb{IR}^2$ für den gilt

$$\forall (u, v) \in \mathbb{I} : f(u, v) - T_{u_0, v_0}(u, v) \in \mathbb{J}$$

eine Restgliedabschätzung n -ter Ordnung von f auf \mathbb{I} .

- das Paar $(T_{u_0, v_0}, \mathbb{J})$ Taylormodell n -ter Ordnung von f
- die Menge aller Restgliedabschätzungen Restgliedfamilie

Satz 3 Sei

$$(T_{u_0, v_0}, \mathbb{J})$$

ein Taylormodell 2.Ordnung des Flächenpatches $f(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{I}$ dann ist

$$\mathbb{L}(u, v) = T_{u_0, v_0}(u, v) + \mathbb{J} \quad (3)$$

eine lineare Intervallabschätzung von F

Beweis:

Betrachtet man die Taylorformel 2.Ordnung des Flächenpatches mit Lagrange Restglied, schätzt den Wertebereich des Restglieds mit Hilfe einer Intervallbox $\mathbb{J} \in \mathbb{IR}^3$ ab und formt Gleichung (3) so um, daß sie die Form (1) erhält:

Satz 4 $f(u, v) \in \mathbb{R}^3$, $(u, v) \in \mathbb{I} = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ sei in \mathbb{I} einmal stetig differenzierbar und die zweite Ableitung existiere. Dann gibt es für alle $(u, v) \in \mathbb{I}$, $(\xi_u, \xi_v) \in [u, u_0] \times [v, v_0]$, so daß gilt

$$f(u, v) = T_{u_0, v_0}(u, v) + R_{u_0, v_0}(u, v, \xi_u, \xi_v)$$

mit dem Taylorpolynom

$$T_{u_0, v_0}(u, v) := f(u_0, v_0) + (u - u_0) f_u(u_0, v_0) + (v - v_0) f_v(u_0, v_0) \quad (4)$$

mit dem Lagrangen Restglied

$$R(u, v, \xi_u, \xi_v) := \frac{1}{2}((u - u_0)^2 f_{uu}(\xi_u, \xi_v) + 2(u - u_0)(v - v_0) f_{uv}(\xi_u, \xi_v) + (v - v_0)^2 f_{vv}(\xi_u, \xi_v)) \quad (5)$$

Eine (grobe) Intervallabschätzung \mathbb{J} des Lagrangen Restgliedes (5) in allen vier Variablen erhält man nach Satz 8 (Einschließungseigenschaft) durch einfache Intervallauswertung der Restgliedformel in allen vier Variablen

$$\mathbb{R} := R(I_u, I_v, I_u, I_v).$$

Bessere Wertebereichsabschätzungen für das Restglied lassen sich mit etwas Mehraufwand beispielsweise mit Hilfe von zentrierten Formen (siehe z.B. [Neumeier '90],

centered forms) berechnen.

Durch einfache Umformung des Taylormodells $(\mathbf{T}_{u_0, v_0}, \mathbb{R})$ erhält man die Darstellung

$$\mathbb{L}(u, v) = \mathfrak{r} + u \mathbf{f}_u(u_0, v_0) + v \mathbf{f}_v(u_0, v_0)$$

mit

$$\mathfrak{r} := \mathbb{R} + \mathbf{f}(u_0, v_0) - u_0 \mathbf{f}_u(u_0, v_0) - v_0 \mathbf{f}_v(u_0, v_0)$$

2.3 Berechnung mit Hilfe affiner Arithmetik

Satz 5 Sei $\mathbf{f}(u, v), (u, v) \in \mathbb{I} := I_u \times I_v$ mit $\text{rad}(I_u), \text{rad}(I_v) > 0$ ein stetiges Flächenstück im \mathbb{R}^3 ,

$$\tilde{u} := u_0 + u_1 \epsilon_u \quad \text{und} \quad \tilde{v} := v_0 + v_1 \epsilon_v; \quad \epsilon_u, \epsilon_v \in [-1, 1]$$

die zu I_u und I_v gehörenden Affinformen und

$$\mathbf{f}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{\mathbf{f}}(\epsilon_u, \epsilon_v, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \mathbf{f}^0 + \mathbf{f}^u \epsilon_u + \mathbf{f}^v \epsilon_v + \sum_{i=1}^n \mathbf{f}^i \epsilon_i$$

mit $\epsilon_u, \epsilon_v, \epsilon_i \in [-1, 1], i = 1, \dots, n$ die Auswertung von \mathbf{f} mit \tilde{u} und \tilde{v} .

Dann ist

$$\mathbb{L}(\epsilon_u, \epsilon_v) := \mathbf{f}^0 + \mathbf{f}^u \epsilon_u + \mathbf{f}^v \epsilon_v + \mathbb{Q}; \quad \epsilon_u, \epsilon_v \in [-1, 1],$$

mit

$$\mathbb{Q} := \left[-\sum_{i=1}^n |\mathbf{f}^i|, \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}^i| \right] \quad (6)$$

eine lineare Intervallabschätzung von \mathbf{f} , wobei $|\mathbf{f}^i| := (|f_1^i|, |f_2^i|, |f_3^i|)^T, i = 1, \dots, n$.

Beweis:

Durch Zusammenfassung von \mathbf{f}^0 und \mathbb{Q} zu $\mathfrak{q} := \mathbf{f}^0 + \mathbb{Q}$ erhält man eine Darstellung der Gleichung (6) in der Form (1):

$$\mathbb{L}(\epsilon_u, \epsilon_v) := \mathfrak{q} + \mathbf{f}^u \epsilon_u + \mathbf{f}^v \epsilon_v; \quad \epsilon_u, \epsilon_v \in [-1, 1] \quad (7)$$

Aus der Definition der Affinformen und der für sie definierten Operationen (siehe Abschnitt B) folgt:

Für alle $(u, v) \in \mathbb{I}$ existieren $\epsilon_u^0, \epsilon_v^0, \epsilon_i^0 \in [-1, 1], i = 1, \dots, n$ so, daß

$$\mathbf{f}(u, v) = \tilde{\mathbf{f}}(\epsilon_u^0, \epsilon_v^0, \epsilon_1^0, \dots, \epsilon_n^0)$$

Wegen der Einschließungseigenschaft der Intervallrechnung Satz 8 gilt damit dann auch:

Für alle $(u, v) \in \mathbb{I}$ existieren $\epsilon_u^0, \epsilon_v^0 \in [-1, 1]$ so, daß

$$\mathbf{f}(u, v) \in \tilde{\mathbf{f}}(\epsilon_u^0, \epsilon_v^0, [-1, 1], \dots, [-1, 1]) = \mathbf{f}^0 + \mathbf{f}^u \epsilon_u + \mathbf{f}^v \epsilon_v + \mathbb{Q}$$

Die Zuordnung zwischen den Intervallen I_u und I_v und den Affinformen \tilde{u}, \tilde{v} ist eineindeutig, falls I_u und I_v keine Punktintervalle sind. In diesem Fall läßt sich die

Beziehung zwischen den Parametern u und v und den Fehlersymbolen ϵ_u und ϵ_v mit Hilfe der bijektiven Abbildungen

$$\phi : \begin{cases} [-1, 1]^2 & \rightarrow \mathbb{I} \\ (\epsilon_u, \epsilon_v) & \mapsto (u, v) \end{cases} \begin{aligned} & := \phi(\epsilon_u, \epsilon_v) \\ & = (\text{rad}(I_u) \epsilon_u + \text{mid}(I_u), \text{rad}(I_v) \epsilon_v + \text{mid}(I_v)) \end{aligned}$$

bzw.

$$\phi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{I} & \rightarrow [-1, 1]^2 \\ (u, v) & \mapsto (\epsilon_u, \epsilon_v) \end{cases} \begin{aligned} & := \phi^{-1}(u, v) \\ & = \left(\frac{1}{\text{rad}(I_u)}(u - \text{mid}(I_u)), \frac{1}{\text{rad}(I_v)}(v - \text{mid}(I_v)) \right) \end{aligned}$$

darstellen. Damit existiert eine bijektive Zuordnung zwischen den Punkten des Flächenstücks und den Intervallpunkten der Intervallebene (7). \square

Durch die Umparametrisierung von \mathbb{L} mit ϕ und Zusammenfassung von \mathbf{f}^0 und \mathbb{Q} zu $\mathbf{q} := \mathbf{f}^0 + \mathbb{Q}$ erhält man eine Darstellung der LIE in der Form (2):

$$\mathbb{L}(u, v) = \mathbf{q} + \mathbf{f}^u u + \mathbf{f}^v v; \quad (u, v) \in \mathbb{I}$$

3 Der Schnitt zweier Parallelogramme im \mathbb{R}^3

Gegeben seien zwei Parallelogramme e_1 und e_2 im \mathbb{R}^3 als Teilstücke nicht paralleler parametrischer Ebenen:

$$\begin{aligned} e_1(u, v) &= \mathbf{p} + u\mathbf{y}_1 + v\mathbf{y}_2; & (u, v) &\in I_u \times I_v = \mathbf{I} & (8) \\ e_2(s, t) &= \mathbf{q} + s\mathbf{w}_1 + t\mathbf{w}_2; & (s, t) &\in J_s \times J_t = \mathbf{J} & (9) \end{aligned}$$

Gesucht wird, falls vorhanden, die genaue Schnittstrecke der beiden Parallelogramme in allen vier möglichen Parametrisierungen: nach s , t , u und v . Oder anders gesprochen: Gesucht werden die Parametergebiete $\tilde{\mathbf{I}} \subseteq \mathbf{I}$ und $\tilde{\mathbf{J}} \subseteq \mathbf{J}$, die genau die Parameterwerte s, t, u und v der Schnittstrecke enthalten.

Durch Gleichsetzen von (8) und (9) erhält man das Gleichungssystem,

$$(\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad -\mathbf{w}_1 \quad -\mathbf{w}_2) \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{r} \quad (10)$$

mit $\mathbf{r} := \mathbf{q} - \mathbf{p}$, aus dem die Schnittgerade der beiden Trägerebenen $e_1(u, v)$, $u, v \in \mathbb{R}$ und $e_2(s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$ berechnet werden kann.

Sind jeweils drei der Vektoren $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ linear unabhängig, lassen sich durch Umformung und Anwendung der Cramerschen Regel auf das System (10) folgende Gleichungen ableiten:

$$\begin{aligned} s_1(u) &= \frac{1}{\alpha}(\kappa + \beta u) & u_1(s) &= \frac{1}{\beta}(-\kappa + \alpha s) \\ s_2(v) &= \frac{1}{\gamma}(\lambda - \beta v) & u_2(t) &= \frac{1}{\delta}(\mu - \alpha t) \\ t_1(u) &= \frac{1}{\alpha}(\mu - \delta u) & v_1(s) &= \frac{1}{\beta}(\lambda - \gamma s) \\ t_2(v) &= \frac{1}{\gamma}(\nu + \delta v) & v_2(t) &= \frac{1}{\delta}(-\nu + \gamma t) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &:= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_2 & -\mathbf{w}_1 & -\mathbf{w}_2 \end{vmatrix} & \kappa &:= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_2 & \mathbf{r} & -\mathbf{w}_2 \end{vmatrix} \\ \beta &:= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & -\mathbf{w}_2 \end{vmatrix} & \lambda &:= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{r} & -\mathbf{w}_2 \end{vmatrix} \\ \gamma &:= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & -\mathbf{w}_1 & -\mathbf{w}_2 \end{vmatrix} & \mu &:= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_2 & -\mathbf{w}_1 & \mathbf{r} \end{vmatrix} \\ \delta &:= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & -\mathbf{w}_1 \end{vmatrix} & \nu &:= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & -\mathbf{w}_1 & \mathbf{r} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

die sich zu vier parametrischen Gleichungen der Schnittgeraden in den Parametergebieten der Parallelogramme zusammenfassen lassen:

$$g_1 : \mathbf{g}_1(u) := \begin{pmatrix} s_1(u) \\ t_1(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \kappa \\ \mu \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \beta \\ -\delta \end{pmatrix}; \quad u \in I_u \quad (11)$$

$$g_2 : \mathbf{g}_2(v) := \begin{pmatrix} s_2(v) \\ t_2(v) \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\beta \\ \delta \end{pmatrix}; \quad v \in I_v \quad (12)$$

und

$$h_1 : \mathbf{h}_1(s) := \begin{pmatrix} u_1(s) \\ v_1(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} -\kappa \\ \lambda \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \alpha \\ -\gamma \end{pmatrix}; \quad s \in J_s \quad (13)$$

$$h_2 : \mathbf{h}_2(t) := \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \mu \\ -\nu \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\alpha \\ \gamma \end{pmatrix}; \quad t \in J_t \quad (14)$$

Diese vier Geraden enthalten jeweils die tatsächliche Schnittstrecke der beiden Parallelogramme, deren genaue Begrenzung aber noch bestimmt werden muß.

3.1 Geometrische Lösung

Wertet man $\mathbf{g}_1(u)$ für $u_{min} := \min(I_1)$ und $u_{max} := \max(I_1)$ aus, erhält man die Parameterwerte $\mathbf{g}_{min}^1 := (s_{min}^1, t_{min}^1)^T$, $\mathbf{g}_{max}^1 := (s_{max}^1, t_{max}^1)^T$ der Schnittpunkte der das Parallelogramm e_1 begrenzenden v-Linien mit der Trägerebene des Parallelogramms e_2 .

Analog erhält man aus den Gleichungen $\mathbf{g}_2(v)$ für $v_{min} := \min(I_2)$ und $v_{max} := \max(I_2)$ die Parameterwerte $\mathbf{g}_{min}^2 := (s_{min}^2, t_{min}^2)^T$, $\mathbf{g}_{max}^2 := (s_{max}^2, t_{max}^2)^T$ der Schnittpunkte der das Parallelogramm e_1 begrenzenden u-Linien mit der Trägerebene des Parallelogramms e_2 .

3.2 Berechnung des Schnittsegments mit Hilfe von Intervallarithmetik

Behauptung 1 *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges reelles Intervall. Dann ist $\mathbf{g}_1(I)$ gleich dem Wertebereich $W(\mathbf{g}_1, I)$ von $\mathbf{g}_1(u)$, $u \in I$. Analoges gilt für $\mathbf{g}_2(v)$, $\mathbf{h}_1(s)$ und $\mathbf{h}_2(t)$.*

Beweis:

Da $\mathbf{g}_1(u)$, $\mathbf{g}_2(v)$, $\mathbf{h}_1(s)$ und $\mathbf{h}_2(t)$ linear sind und der jeweilige Parameter nur einmal im Funktionsterm vorkommt folgt die Behauptung direkt Anwendung von Satz 9 auf die Funktionen der einzelnen Komponenten.

Berechnet man also die Wertebereiche der Funktionen $g_1(u)$ und $g_2(v)$ jeweils direkt mittels Intervallarithmetik, erhält man aufgrund Behauptung 1 das gleiche Ergebnis wie oben:

Es gilt $\min(g_1(I_u)) \equiv g_{min}^1$ und $\min(g_2(I_v)) \equiv g_{min}^2$.

Behauptung 2 *Der Intervallvektor*

$$\tilde{\mathbf{J}} := g_1(I_u) \cap g_2(I_v) \cap \mathbf{J}$$

ist für $\tilde{\mathbf{J}} \neq \emptyset$ eine (überschätzte) Einschließung für die Parameterwerte des Schnittes des Parallelogramms e_1 mit der Trägerebenen des Parallelogramms e_2 .

Beweis:

Sei $\hat{\mathbf{J}} := g_1(I_u) \cap g_2(I_v)$ und $\tilde{\mathbf{J}} := \hat{\mathbf{J}} \cap \mathbf{J}$

1. Ist $\hat{\mathbf{J}} \not\subseteq \mathbf{J}$ aber $\tilde{\mathbf{J}} \neq \emptyset$, so bildet das Gebiet $\tilde{\mathbf{J}}$ eine im allgemeinen überschätzte Einschließung des Parametergebietes der Schnittstrecke bezüglich s und t .

Denn: In diesem Fall liegen die inneren beiden ($e_2(\min(\hat{\mathbf{J}}))$ und $e_2(\max(\hat{\mathbf{J}}))$) der berechneten vier Schnittpunkte der u - und v -Linien des Parallelogramms e_2 teilweise oder ganz außerhalb des Parallelogramms e_1 .

Da $\tilde{\mathbf{J}} \neq \emptyset$, ist die eigentliche Schnittstrecke eine Teilstrecke der berechneten Strecke und $\hat{\mathbf{J}}$ ist eine Überschätzung des dazugehörigen Parametergebietes.

Ist die Schnittstrecke nicht parallel zu einer der Begrenzungslinien des Parametergebietes, so ist auch $\tilde{\mathbf{J}}$ eine Überschätzung des Parametergebietes der eigentlichen Schnittstrecke, da die Schnittpunkte der Strecke mit den Seiten des Parametergebietes in den meisten Fällen nicht auf den Eckpunkten des Schnittes liegen.

2. Falls $\hat{\mathbf{J}} \subseteq \mathbf{J}$, so bildet $\tilde{\mathbf{J}} =: \hat{\mathbf{J}}$ bereits die exakte Einschließung des Parametergebietes, in dem die Schnittstrecke liegt.

Denn: In diesem Fall liegen die inneren beiden ($e_2(\min(\mathbf{J}))$ und $e_2(\max(\mathbf{J}))$) der berechneten vier Schnittpunkte der u - und v -Linien des Parallelogramms e_2 innerhalb des Parallelogramms e_1 und sind somit die exakten Begrenzungspunkte der Schnittstrecke.

3. Ist das Intervall leer, schneiden sich die beiden Parallelogramme nicht.

Behauptung 3 *Sei $\tilde{\mathbf{J}} \neq \emptyset$. Der Intervallvektor*

$$\tilde{\mathbf{I}} := h_1(\tilde{\mathbf{J}}_s) \cap h_2(\tilde{\mathbf{J}}_t)$$

ist die genaue Einschließung der Parameterwerte des Schnittes des Parallelogramms e_2 mit der Trägerebenen des Parallelogramms e_1 .

Beweis:

Berechnet man $\tilde{\mathbf{I}} := h_1(\tilde{\mathbf{J}}_s) \cap h_2(\tilde{\mathbf{J}}_t)$, so gilt $\tilde{\mathbf{I}} \subseteq \mathbf{I}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}} &= h_1(\tilde{\mathbf{J}}_s) \cap h_2(\tilde{\mathbf{J}}_t) \\ &= h_1(s_1(I_u) \cap s_2(I_v) \cap J_t) \cap h_2(t_1(I_u) \cap t_2(I_v) \cap J_s) \end{aligned}$$

h_1, h_2 injektiv, da linear

$$= h_1(s_1(I_u)) \cap h_1(s_2(I_v)) \cap h_1(J_s) \cap h_2(t_1(I_u)) \cap h_2(t_2(I_v)) \cap h_2(J_s)$$

$h_1 \circ s_1 = id$ und $h_2 \circ t_1 = id$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{I} \cap h_1(s_2(I_v)) \cap h_1(J_s) \cap \mathbf{I} \cap h_2(t_2(I_v)) \cap h_2(J_s) \\ &\subseteq \mathbf{I} \end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{I}}$ bildet folglich, analog zum Beweis Behauptung 2 Fall 2), die genauen Einschließung des u-v-Parametergebiets in dem die Schnittstrecke liegt.

Behauptung 4 Sei $\tilde{\mathbf{I}} \neq \emptyset$. Der Intervallvektor

$$\tilde{\mathbf{J}} := g_1(\tilde{I}_u) \cap g_2(\tilde{I}_v)$$

ist die genaue Einschließung Parameterwerte des Schnittes des Parallelogramms e_1 mit der Trägerebenen des Parallelogramms e_2 .

Beweis analog zu Behauptung 3.

Die Behauptungen 2 – 4 werden zu folgendem Satz zusammengefaßt, der gleichzeitig einen Algorithmus für die Berechnung eines reduzierten Parametergebietes definiert:

Satz 6 Sind jeweils drei der Vektoren $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ linear unabhängig, so ist die Schnittstrecke der beiden Parallelogramme e_1 und e_2 durch jede der vier Gleichungen $g_1(u)$, $u \in \tilde{I}_u$, $g_2(v)$, $v \in \tilde{I}_v$, $h_1(s)$ $s \in \tilde{J}_s$ und $h_2(t)$ $t \in \tilde{J}_t$ gegeben, wobei

$$\tilde{\mathbf{J}} := g_1(I_u) \cap g_2(I_v) \cap \mathbf{J}$$

$$\tilde{\mathbf{I}} := h_1(\tilde{J}_s) \cap h_2(\tilde{J}_t)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} := g_1(\tilde{I}_u) \cap g_2(\tilde{I}_v)$$

Ist mindestens eines der Parametergebiete $\tilde{\mathbf{J}}, \tilde{\mathbf{I}}$ oder $\tilde{\mathbf{J}}$ leer, so schneiden sich die Parallelogramme nicht.

3.3 Sonderfälle

Sonderfälle treten auf, falls eine oder mehrere der Determinanten α, β, γ und δ verschwinden. Geometrisch interpretiert heißt das, wenn

1. eine Kante des einen Parallelogramms parallel zum anderen Parallelogramm (eine der Determinanten verschwindet) oder sogar parallel zu einer seiner Kanten ist. (jeweils zwei verschwindende Determinanten: $\gamma = \delta = 0, \gamma = \beta = 0, \alpha = \beta = 0$ oder $\alpha = \delta = 0$)
2. e_1 und e_2 parallel sind aber nicht in der gleichen Ebene liegen ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ und mindestens zwei der Determinanten $\kappa, \lambda, \mu, \nu \neq 0$).
3. e_1 und e_2 in der gleichen Ebene liegen. ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = \kappa = \lambda = \mu = \nu = 0$).

Fall 1) kann wie folgt behandelt werden:

Für

- $\alpha = 0$ sei $g_1(u) := \mathbf{J}$

- $\gamma = 0$ sei $\mathbf{g}_2(v) := \mathbf{J}$
- $\beta = 0$ sei $\mathbf{h}_1(s) := \mathbf{I}$
- $\delta = 0$ sei $\mathbf{h}_2(t) := \mathbf{I}$

Satz 6 gilt auch hier: $\tilde{\mathbf{I}}$ und $\tilde{\mathbf{J}}$ sind die exakten Einschließungen der Lösung.

Im Fall 2) gilt: die beiden Parallelelogramme schneiden sich nicht.

Im Fall 3) muß durch Schnitt der Begrenzungsgeraden der beiden Parallelelogramme das Parametergebiet festgestellt werden in den sich die beiden Parallelelogramme schneiden.

4 Der Schnitt zweier LIEs

Gegeben seien zwei LIEs im \mathbb{R}^3

$$\mathbb{L}_1(u, v) = \mathfrak{p} + u\mathbf{y}_1 + v\mathbf{y}_2; \quad (u, v) \in I_u \times I_v = \mathbb{I} \quad (15)$$

$$\mathbb{L}_2(s, t) = \mathfrak{q} + s\mathbf{w}_1 + t\mathbf{w}_2; \quad (s, t) \in J_s \times J_t = \mathbb{J} \quad (16)$$

wobei jeweils drei der Vektoren $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ linear unabhängig seien. (Die anderen Fälle werden als Sonderfälle betrachtet.)

Gesucht wird, falls vorhanden, die genaue Intervallschnittstrecke der beiden LIEs in allen vier möglichen Parametrisierungen: nach s, t, u und v . Oder anders gesprochen: Gesucht werden die Parametergebiete $\tilde{\mathbb{I}} \subseteq \mathbb{I}$ und $\tilde{\mathbb{J}} \subseteq \mathbb{J}$, die genau die Parameterwerte s, t, u und v der Intervallschnittstrecke enthalten.

Durch Gleichsetzen von (15) und (16) erhält man ein System linearer Gleichungssysteme,

$$(\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad -\mathbf{w}_1 \quad -\mathbf{w}_2) \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{r}; \quad \mathbf{r} \in \mathfrak{r} := \mathfrak{q} - \mathfrak{p}; \quad (17)$$

aus dem die Intervallschnittgerade der beiden LIEs $\mathbb{L}_1(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{I}$ und $\mathbb{L}_2(s, t)$, $(s, t) \in \mathbb{J}$ berechnet werden kann.

Sind jeweils drei der Vektoren $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ linear unabhängig kann hier prinzipiell genau so vorgegangen werden, wie in Abschnitt 3.

Die Gleichungen für s, t, u und v sind äquivalent zu den dort aufgestellten Gleichungen bis auf die Bestimmung von κ, λ, μ und ν , die in diesem Falle durch die Werte K, L, M und N ersetzt werden:

$$\begin{aligned} K &:= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_2 & \mathfrak{r} & -\mathbf{w}_2 \end{vmatrix} \\ L &:= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathfrak{r} & -\mathbf{w}_2 \end{vmatrix} \\ M &:= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_2 & -\mathbf{w}_1 & \mathfrak{r} \end{vmatrix} \\ N &:= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & -\mathbf{w}_1 & \mathfrak{r} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (11)–(14) werden damit mit

$$\begin{aligned} S_1(u) &= \frac{1}{\alpha}(K + \beta u) & U_1(s) &= \frac{1}{\beta}(-K + \alpha s) \\ S_2(v) &= \frac{1}{\gamma}(L - \beta v) & U_2(t) &= \frac{1}{\delta}(M - \alpha t) \\ T_1(u) &= \frac{1}{\alpha}(M - \delta u) & V_1(s) &= \frac{1}{\beta}(L - \gamma s) \\ T_2(v) &= \frac{1}{\gamma}(N + \delta v) & V_2(t) &= \frac{1}{\delta}(-N + \gamma t) \end{aligned}$$

zu

$$\mathfrak{g}_1(u) := \begin{pmatrix} S_1(u) \\ T_1(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} K \\ M \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \beta \\ -\delta \end{pmatrix}; \quad u \in I_u \quad (18)$$

$$\mathfrak{g}_2(v) := \begin{pmatrix} S_2(v) \\ T_2(v) \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} L \\ N \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\beta \\ \delta \end{pmatrix}; \quad v \in I_v \quad (19)$$

und

$$\mathfrak{h}_1(s) := \begin{pmatrix} U_1(s) \\ V_1(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} -K \\ L \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \alpha \\ -\gamma \end{pmatrix}; \quad s \in J_s \quad (20)$$

$$\mathfrak{h}_2(t) := \begin{pmatrix} U_2(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} M \\ -N \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\alpha \\ \gamma \end{pmatrix}; \quad t \in J_t \quad (21)$$

Bemerkung 1 Aus Satz 12 folgt, daß \mathfrak{g}_i und \mathfrak{h}_j , $i, j = 1, 2$ für definierte Werte von u, v, s und t jeweils eine optimale achsenparallele Einschließung der Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems angeben, falls die Determinanten K, L, M und N berechnet werden, indem man sie zuerst nach dem Komponenten des Intervallvektors \mathfrak{r} entwickelt.

Somit gilt auch für LIEs

Behauptung 5 Der Intervallvektor

$$\tilde{\mathfrak{J}} = \mathfrak{g}_1(I_u) \cap \mathfrak{g}_2(I_v) \cap \mathfrak{J}$$

ist für $\tilde{\mathfrak{J}} \neq \emptyset$ eine (überschätzte) Einschließung für die Parameterwerte des Schnittes von \mathbb{L}_1 mit der Intervallträgerebenen von \mathbb{L}_2 .

Für LIEs gilt allerdings nicht die Aussage, daß die in Behauptung 3 und 4 berechneten Intervalle $\tilde{\mathfrak{I}}, \tilde{\mathfrak{J}}$ die exakten Einschließungen sind, da sich zum Einen durch den iterativen Charakter der Berechnung Überschätzungen ergeben und zum Anderen nur achsenparallele Einschließungen berechnet werden: Jeder Intervallpunkt des berechneten Schnittsegments schließt eine gewisse Menge von Intervallpunkten der LIEs ein, die vom Schnitt betroffen sind.

Um die Überschätzungen zu reduzieren werden die berechneten Einschließungen in jedem Schritt mit vorangegangenen Einschließungen bzw. den ursprünglichen Parametergebieten geschnitten.

Die Behauptungen 3 und 4 werden deshalb wie folgt abgeändert:

Behauptung 6 Sei $\tilde{\mathbb{J}} \neq \emptyset$. Der Intervallvektor

$$\tilde{\mathbb{I}} = \mathfrak{h}_1(\tilde{J}_s) \cap \mathfrak{h}_2(\tilde{J}_t) \cap \mathbb{I}$$

ist eine Einschließung der Parameterwerte des Schnittes von \mathbb{L}_2 mit der Intervall-trägerebenen von \mathbb{L}_1 .

Behauptung 7 Sei $\tilde{\mathbb{I}} \neq \emptyset$. Der Intervallvektor

$$\tilde{\mathbb{J}} = \mathfrak{g}_1(\tilde{I}_u) \cap \mathfrak{g}_2(\tilde{I}_v) \cap \tilde{\mathbb{J}}$$

ist eine Einschließung der Parameterwerte des Schnittes von \mathbb{L}_1 mit der Intervall-trägerebene von \mathbb{L}_2 .

Die Behauptungen 5 – 7 werden zu folgendem Satz zusammengefaßt, der analog zu Satz 6 einen Algorithmus für einen Schnitttest mit Parametergebietsreduzierung darstellt:

Satz 7 Seien \mathbb{L}_1 und \mathbb{L}_2 die durch die Gleichungen 15 und 16 definierten LIEs und $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ die Intervallgeraden mit den Gleichungen 18 – 21. Sind jeweils drei der Vektoren $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ linear unabhängig, so ist eine Einschließung der Intervallschnittstrecke von \mathbb{L}_1 und \mathbb{L}_2 durch jede der vier Gleichungen $\mathfrak{g}_1(u)$, $u \in \tilde{I}_u$, $\mathfrak{g}_2(v)$, $v \in \tilde{I}_v$, $\mathfrak{h}_1(s)$ $s \in \tilde{J}_s$ und $\mathfrak{h}_2(t)$ $t \in \tilde{J}_t$ gegeben, wobei

$$\tilde{\mathbb{J}} := \mathfrak{g}_1(I_u) \cap \mathfrak{g}_2(I_v) \cap \mathbb{J}$$

$$\tilde{\mathbb{I}} := \mathfrak{h}_1(\tilde{J}_s) \cap \mathfrak{h}_2(\tilde{J}_t) \cap \mathbb{I}$$

$$\tilde{\mathbb{J}} := \mathfrak{g}_1(\tilde{I}_u) \cap \mathfrak{g}_2(\tilde{I}_v) \cap \tilde{\mathbb{J}}$$

Ist mindestens eines der Parametergebiete $\tilde{\mathbb{J}}, \tilde{\mathbb{I}}$ oder $\tilde{\mathbb{J}}$ leer, so schneiden sich die LIEs nicht.

4.1 Sonderfälle

Die in Abschnitt behandelten Sonderfälle gelten in ähnlicher Weise auch für LIEs.

- Fall 1 ($\gamma = \delta = 0, \alpha = \beta = 0$ oder $\alpha = \delta = 0$) wird genauso behandelt wie bei Parallelogrammen.
- Fall 2 ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ und mindestens zwei der Determinanten $\kappa, \lambda, \mu, \nu \neq 0$) und Fall 3 ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = \kappa = \lambda = \mu = \nu = 0$) werden gemeinsam behandelt: Ist $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ werden achsenparallele Einschließungsquader berechnet (z.B. durch direkte Auswertung der Flächenbeschreibungen mit Intervallen oder affiner Arithmetik) mit denen ein einfacher Schnitttest vorgenommen wird.

Literatur

G. Alefeld, J. Herzberger (1974). *Einführung in die Intervallrechnung*. Nummer 12 in Reihe Informatik. BI Wissenschaftsverlag.

- Marcus Andrade, João Comba, Jorge Stolfi** (1994). Affine Arithmetic. Submitted to Interval 94, 1994.
- Martin Berz, Georg Hofstätter** (1998). Computation and Application of Taylor Polynomials with Interval Remainder Bounds. *Reliable Computing*, 4:83–97.
- Katja Bühler, Wilhelm Barth** (2001). A new intersection algorithm for parametric surfaces based on linear interval estimations. In *Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- H.Heuser** (1988a). *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. Teubner Verlag, Stuttgart, 5 Auflage.
- H.Heuser** (1988b). *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Teubner Verlag, Stuttgart, 4 Auflage.
- Arnold Neumeier** (1990). *Interval Methods for Systems of Equations*, Band 37 von *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press.
- Jorge Stolfi, Luiz Enrique de Figueiredo** (1997). *Self-Validated Numerical Methods and Applications*. unpublished. Course Notes for the 21th Brazilian Mathematics Colloquium held at IMAP, July 1997.

A Intervallararithmetik

In der Beschreibung zum Buch “Interval Methods for Systems of Equations” ([Neumeier ’90]) werden Intervalle folgendermaßen beschrieben: “An interval is the natural way of specifying a number that is specified only within a certain tolerances.”. Ausgangspunkt für die Verwendung der Intervallrechnung in der Numerischen Mathematik war ursprünglich der Wunsch die durch die begrenzte Genauigkeit der Maschinenarithmetik verursachten Rundungsfehler zu erfassen und eine enge Fehlerabschätzung zu erhalten ([Alefeld, Herzberger ’74]). Die moderne Intervallanalysis beschäftigt sich unter anderem mit Methoden zur Bestimmung von Lösungen linearer und nichtlinearer Gleichungssysteme vor dem Hintergrund unsicherer Daten, der Berechnung von Wertebereichen von Funktionen und deren Ableitungen und der Verifizierung numerischer Berechnungen.

In den folgenden Abschnitten wird ein kurzer Überblick über Grundlagen der Intervallararithmetik und -analysis gegeben, die für die folgenden Betrachtungen relevant sind. Für eine ausführliche Einführung in das Thema sei an dieser Stelle auf die Bücher [Alefeld, Herzberger ’74] und [Neumeier ’90] verwiesen, die die Basis für die folgenden Abschnitte bildeten.

A.1 Definitionen und Bezeichnungen

Ein *abgeschlossenes reelles Intervall* I ist definiert als

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Die Menge aller abgeschlossenen reellen Intervalle wird im Folgenden mit \mathbb{IR} bezeichnet.

Sei $I = [a, b] \in \mathbb{IR}$, dann bezeichnet

$\inf(I)$	$:= a$	das <i>Infimum</i> von I
$\sup(I)$	$:= b$	das <i>Supremum</i> von I
$\text{rad}(I)$	$:= \frac{(b-a)}{2}$	den <i>Mittelpunkt</i> von I
$\text{mid}(I)$	$:= \frac{(a+b)}{2}$	den <i>Radius</i> von I
$ I $	$:= \max\{a, b\}$	den <i>Betrag</i> von I .

Ein Intervall I heißt *dünn*, wenn $\inf(I) = \sup(I)$.

Sei M eine nichtleere beschränkte Teilmenge aus \mathbb{R} , dann wird mit

$$\square M := [\inf\{M\}, \sup\{M\}]$$

die *Hülle* von M bezeichnet.

A.2 Relationen

Zwei Intervalle I und J heißen gleich ($I = J$), wenn zwischen ihnen mengentheoretische Gleichheit besteht. Die Relation “=” ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

Die Relationen $<, \leq, >, \geq$ sind nur für Intervalle definiert, die sich höchstens einen Randpunkt gemeinsam haben.

A.3 Arithmetische Operationen

Ist $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$, dann gilt für $I, J \in \mathbb{IR}$

$$I * J = \{z = x * y \mid x \in I, y \in J\}$$

Explizit ergeben sich für $I = [a, b], J = [c, d]$ folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} I + J &:= [a + c, b + d] \\ I - J &:= [a - d, b - c] \\ I \cdot J &:= [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}] \\ I / J &:= [a, b] \cdot \left[\frac{1}{d}, \frac{1}{c}\right] \end{aligned}$$

Für die Division wird hierbei vorausgesetzt, daß $0 \notin J$.

A.4 Vektoren und Matrizen

Für *Intervallvektoren* ($\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbb{I}, \mathbb{J}, \dots \in \mathbb{IR}^n$) und *Intervallmatrizen* ($\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{M}, \dots \in \mathbb{IR}^{m \times n}$) gelten alle obigen Aussagen komponentenweise.

A.5 Intervallauswertung arithmetischer Ausdrücke

Die Rechenregeln für die intervallmäßige Auswertung stetiger Grundfunktionen wie Betrag, Wurzel, Quadrat, Sinus, Cosinus, die Exponentialfunktion und der Logarithmus ergeben sich direkt aus der Betrachtung des (bekannten) Wertebereichs und

ihren Monotonieeigenschaften:

Sei ϕ eine der oben genannten Funktionen und $I \in \mathbb{IR}$, so gilt

$$\phi(I) := \square\{\phi(x) \mid x \in I\} = \{\phi(x) \mid x \in I\}$$

Satz 8 (Einschließungseigenschaft [Alefeld, Herzberger '74]) Sei $f(u_1, \dots, u_n)$ eine stetige Funktion in $u_i \in U_i \in \mathbb{IR}$. Dann gilt für alle $(u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^n U_i$ $f(u_1, \dots, u_n) \in f(U_1, \dots, U_n)$.

Satz 9 ([Alefeld, Herzberger '74]) Gegeben sei ein reelles Polynom p der reellen Veränderlichen x . Dieses sei dargestellt durch den Ausdruck

$$p(x) = (\dots((a_m x + a_{m-1})_{m-1}^n + a_m - 2)_{m-2}^n + \dots a_1)_1^n + a_0$$

mit $n_\nu \geq 2$, $1 \leq \nu \leq m - 1$.

Dann gilt bei der Auswertung der auftretenden Potenzen als

$$X^k := [\min_{x \in X} x^k, \max_{x \in X} x^k]$$

stets $W(p, X) = p(X)$.

Für allgemeine arithmetische Ausdrücke gilt:

Satz 10 ([Neumeier '90]) Sei $f(x); x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I} \in \mathbb{IR}^n$ ein arithmetischer Ausdruck, in dem jedes $x_i, i = 1, \dots, n$ nur einmal vorkommt. Dann gilt

$$f(\mathbb{J}) = \square\{f(x) \mid x \in \mathbb{J}\} \text{ für alle } \mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$$

Satz 10 wird in [Stolfi, de Figueiredo '97] auch *Fundamentalinvariante der Wertebereichsanalyse* genannt.

Die direkte Intervallauswertung arithmetischer Ausdrücke führt nur in wenigen Spezialfällen zu einer optimalen Einschließung des Wertebereichs. Ein großes Problem bilden bei der Auswertung auftretende Überschätzungen. In Fällen, in denen eine Variable mehrmals im Ausdruck auftritt, hängt die Qualität des Einschließung schon oft entscheidend von der Art ab in welcher Form der Ausdruck geschrieben wird, da die Intervallarithmetik keine Abhängigkeiten der Variablen berücksichtigt. Betrachtet man beispielsweise die Funktion $f(x) = x - x; x \in [-1, 1]$, so gilt $W_f = \{0\}$, die intervallmäßige Auswertung von f überschätzt das tatsächliche Ergebnis sehr grob: $f([-1, 1]) = [-1, 1] - [-1, 1] = [-2, 2]$.

Einige Methoden um engere Einschließungen für Wertebereiche einer Funktion $f(x)$, $x \in I$ zu bekommen werden in [Neumeier '90], Kapitel 2 basierend auf Lipschitzkonstanten, dem Mittelwertsatz $f(x) = f(\text{mid}(I)) + f'(x)(x - \text{mid}(I))$, *slopes* oder allgemeiner auf den sogenannten *centered forms* $f(x) = f(\tilde{z}) + s(x - \tilde{z})$ mit Zentrum \tilde{z} und Steigung s .

A.6 Lineare Intervallgleichungssysteme

Eine *lineare Intervallgleichung* mit der Koeffizientenmatrix $\mathbb{A} \in I\mathbb{R}^{m \times n}$ und der rechten Seite $\mathbb{b} \in I\mathbb{R}^m$ ist als die Familie linearer Gleichungen

$$A\mathbf{b} = \mathbf{x}; \quad A \in \mathbb{A}, \mathbf{b} \in \mathbb{b} \quad (22)$$

definiert (siehe z.B. [Neumeier '90]). Die Menge

$$\Sigma(\mathbb{A}, \mathbb{b}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ für ein } A \in \mathbb{A} \text{ und } \mathbf{b} \in \mathbb{b}\} \quad (23)$$

heißt *Lösungsmenge* von (22).

Ist A regulär, so ist $\Sigma(\mathbb{A}, \mathbb{b})$ beschränkt und die Hülle

$$\mathbb{A}^H \mathbb{b} := \square \Sigma(\mathbb{A}, \mathbb{b}) \quad (24)$$

ist definiert.

Satz 11 ([Neumeier '90]) *Ist \mathbb{A} regulär und dünn, so ist die Hülle der Lösungsmenge mit der Lösungsmenge identisch:*

$$\mathbb{A}^H \mathbb{b} = \mathbb{A}^{-1} \mathbb{b}$$

Aus Satz 11 und

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |e_1 \ a_2 \ a_3| & |e_2 \ a_2 \ a_3| & |e_3 \ a_2 \ a_3| \\ |a_1 \ e_1 \ a_3| & |a_1 \ e_2 \ a_3| & |a_1 \ e_3 \ a_3| \\ |a_1 \ a_2 \ e_1| & |a_1 \ a_2 \ e_2| & |a_1 \ a_2 \ e_3| \end{pmatrix}$$

folgt unmittelbar

Satz 12 *Sei $A := (a_i) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$; $a_i \in \mathbb{R}^3$ regulär und $\mathbb{b} \in I\mathbb{R}^3$. Dann ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems (22) gerade*

$$\mathbb{A}^H \mathbb{b} = \mathbb{A}^{-1} \mathbb{b} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |\mathbb{b} \ a_2 \ a_3| \\ |a_1 \ \mathbb{b} \ a_3| \\ |a_1 \ a_2 \ \mathbb{b}| \end{pmatrix}$$

falls die Determinanten $|\mathbb{b} \ a_2 \ a_3|$, $|a_1 \ \mathbb{b} \ a_3|$ und $|a_1 \ a_2 \ \mathbb{b}|$ jeweils so berechnet werden, daß sie nach den Komponenten des Vektors \mathbb{b} entwickelt werden.

A.7 Implementierungen

- XSC-Sprachen: Intervallbibliotheken der Universität Karlsruhe, die in Fortran, C und C++ erhältlich sind
- BIAS/Profil: C++ Intervallbibliothek der TU Hamburg-Harburg

B Affine Arithmetik [Andrade et al. '94]

Um die durch die Intervallarithmetik verursachten Überschätzungen, zu reduzieren wurde die 1994 in [Andrade et al. '94] erstmals vorgestellte auf sogenannten Affinformen basierende Affine Arithmetik entwickelt. Affine Arithmetik liefert, genau wie die Intervallarithmetik, automatisch Approximation- und Rundungsfehler für jede berechnete Größe, beachtet aber zusätzlich noch die Abhängigkeiten der Eingabegrößen. Affine Arithmetik ist wesentlich komplexer als Intervallarithmetik und somit auch teurer in Bezug auf die Rechenzeit. Je nach Anwendung kann dies aber durch die höhere Genauigkeit der Ergebnisse ausgeglichen werden.

Die folgende Definition der Affinform weicht von den in [Andrade et al. '94] und [Stolfi, de Figueiredo '97] gegebene Definitionen ab.

B.1 Definitionen und Bezeichnungen

Eine *Affinform* ist definiert als

$$\hat{x} = \hat{x}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) := x_0, +x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \dots + x_n\epsilon_n; \quad \epsilon_i \in [-1, 1]$$

wobei die x_i bekannte reelle Koeffizienten darstellen und die ϵ_i Variablen sind, die für unabhängige Fehler- oder Unsicherheitsquelle stehen, die ihren Ursprung sowohl in Inputdaten, als auch in Rundungs- und Approximationsfehlern haben können. x_0 heißt *Zentrum* der Affinform. Die x_i ; $i = 1, \dots, n$ heißen *partielle Abweichungen*, die ϵ_i ; $i = 1, \dots, n$ *Fehlersymbole* der Affinform.

Kurzschreibweise: $\hat{x} = (x_0, \dots, x_n)$.

Der Wertebereich einer Affinform repräsentiert also ähnlich einem Intervall einen unsicheren Wert x , allerdings mit dem Unterschied, daß die Unsicherheiten, von denen der Wert abhängt sehr viel genauer aufgeschlüsselt sind, als das bei einem Intervall der Fall ist.

Im Folgenden wird der Begriff *Affinform* mit dem Wertebereich der oben definierten Affinform gleichgesetzt.

B.2 Konvertierung Intervallarithmetik/Affine Arithmetik

Sei $\hat{x} := x_0, +x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \dots + x_n\epsilon_n$ eine Affinform. Dann gilt für alle $x \in \hat{x}$

$$x \in X := [x_0 - \sum_{i=1}^n |x_i|, x_0 + \sum_{i=1}^n |x_i|]$$

X ist das kleinste Intervall, daß alle möglichen Werte von x enthält.

Umgekehrt gilt: Sei $Y \in \mathbb{IR}$. Dann ist

$$\hat{y} = y_0 + y_k\epsilon_k$$

mit $y_0 := \text{mid}(Y)$; $y_k := \text{rad}(Y)$ die Y repräsentierende Affinform.

B.3 Affine Operationen

Seien $\hat{x} = (x_0, \dots, x_n)$ und $\hat{y} = (y_0, \dots, y_n)$ zwei Affinformen bezüglich der gleichen Fehlersymbole $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$ und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelte

1. $\hat{x} \pm \hat{y} := (x_0 \pm y_0, \dots, x_n \pm y_n)$
2. $\alpha \hat{x} := (\alpha x_0, \dots, \alpha x_n)$
3. $\hat{x} + \alpha := (x_0 \pm \alpha, x_1, \dots, x_n)$

B.4 Nicht affine Operationen

B.4.1 Allgemeine Vorgehensweise:

1. Unterteile die Operation (falls möglich) in einen affinen Teil und in einen nicht affinen Teil.
2. Berechne den affinen Teil wie im vorigen Abschnitt beschrieben.
3. Berechne eine affine (Best-)Approximation (z.B. eine Tschebycheffapproximation) für den nicht-affinen Teil, multipliziere den Approximationsfehler mit einem neuen Fehlersymbol und addiere ihn zur Affinform.

Da eine tatsächliche Tschebycheffapproximation aufgrund ihrer Geometrie bei der Umwandlung der berechneten Affinform in ein Intervall teilweise unerwünschte Überschätzungen liefert, wird in [Stolfi, de Figueiredo '97] empfohlen, die affine Approximation mittels einer Min-Range-Approximation zu berechnen.

B.4.2 Beispiele für die Berechnung der Affinformen mit einer Min-Range Approximation

Seien $\hat{x} = (x_0, \dots, x_n)$ und $\hat{y} = (y_0, \dots, y_n)$ zwei Affinformen bezüglich der gleichen Fehlersymbole $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$ und sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Multiplikation:

$$\hat{x} * \hat{y} = (x_0 y_0, x_0 y_1 + y_0 x_1, \dots, x_0 y_n + y_0 x_n, \left(\sum_{i=0}^n |x_i|\right) \left(\sum_{i=0}^n |y_i|\right))$$

2. Quadratwurzel:

$$\sqrt{\hat{x}} = (\alpha x_0 + \beta, \alpha x_1, \dots, \alpha x_n, \delta)$$

mit

$$\alpha := \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}; \quad \beta := \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{8} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}; \quad \delta := \frac{1}{8} \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

B.4.3 Die Behandlung von Rundungsfehlern

Für Rundungsfehler wird ein neues Fehlersymbol eingeführt, zu dessen zugehöriger partieller Abweichung die oberen Schranken aller auftretender Rundungsfehler addiert werden.

B.5 Implementierungen

- Affine Arithmetic Package in C von de Figueiredo. Hier fehlt allerdings die Implementierung der Grundfunktionen (Sinus, Cosinus, Tangens,...)
- C++ Bibliothek von Ronald van Iwaarden, die auf Grund der verwendeten Datenstrukturen ineffizient ist.

C Taylormodelle, [Berz, Hofstätter '98]

Taylormodelle sind ein weiterer Versuch, die durch reine Intervallarithmetik verursachten Überschätzungen zu reduzieren. Dazu übertrug Berz das seit langem angewandte Verfahren Ableitungen einer Funktion effizient und beliebig genau über deren Taylorentwicklung zu bestimmen auf die Auswertung komplizierterer Ausdrücke. Es zeigt sich, daß die Überschätzungen, die bei einer direkten Intervallauswertung auftreten, wesentlich reduziert werden können, wenn der Ausdruck als Taylorpolynom beliebigen Grades dargestellt und ausgewertet wird.

C.1 Definitionen und Grundlagen

Grundlage für die Entwicklung der Theorie der Taylormodelle bildet der Satz von Taylor:

Satz 13 (z.B. [H.Heuser '88a]) Sei $f \in C^{(n)}(I)$, $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \in \mathbb{IR}$ mit existierender $n + 1$. Ableitung auf I . Dann existiert für alle $x \in I$ ein $\xi \in I$, so daß

$$f(x) = T(x) + L_\xi(x)$$

wobei

$$T_n(x) := \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu$$

das n -te Taylorpolynom von f an der Stelle x_0 und

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Lagranges Restglied der Taylorformel heißt.

Für den multivariaten und speziell den bivariaten Fall siehe z.B. [H.Heuser '88b].

Sei also $f \in C^{n+1}(D_f)$; $D_f \subset \mathbb{R}^m$ und $D_f \subseteq B \in \mathbb{IR}^n$. Desweiteren bezeichne $T(x)$ das n -te Taylorpolynom von f um den Punkt $x_0 \in B$. Dann heißt

- das Intervall I mit

$$\forall x \in B : f(x) - T_n(x) \in I$$

Restgliedabschätzung n -ter Ordnung von f auf B .

- das Paar (T_n, I) *Taylormodell n . Ordnung von f*
- die Menge aller Restgliedabschätzungen *Restgliedschar*

Da die $n + 1$. Ableitung als stetig vorausgesetzt wurde und B kompakt ist, ist die Restgliedabschätzung immer beschränkt und es existiert eine optimale Abschätzung, denn:

Sei T_n das n -te Taylorpolynom von f und $g := f - T_n$. Dann ist g stetig und besitzt zwei Extrema für x_l und x_u . und es ist offensichtlich, daß $I := [g(x_l), g(x_u)]$ ein Element der Restgliedschar ist, das in jeder anderen Restgliedabschätzung enthalten ist. I wird *optimale Restgliedabschätzung* genannt.

C.2 Arithmetische Ausdrücke

Ein Taylormodell für einen komplexeren Ausdruck kann aus sukzessive aus Taylormodellen für Grundfunktionen abgeleitet werden. Dazu entwickelte Berz eine Art Taylorarithmetik, die wie im Falle der Intervallrechnung auf Mengenoperationen basiert.

Seien im Folgenden (T_f, I_f) und (T_g, I_g) Taylormodelle n -ter Ordnung der Funktionen f und g die jeweils über $B \in \mathbb{IR}^n$ definiert seien.

C.2.1 Addition/Subtraktion:

$$(T_{f \pm g}, I_{f \pm g}) := (T_f \pm T_g, I_f \pm I_g)$$

C.2.2 Multiplikation:

Für jedes $\mathbf{x} \in B$ existieren $e_f \in I_f$ und $e_g \in I_g$ so, daß $f(\mathbf{x}) = T_f(\mathbf{x}) + e_f$ und $g(\mathbf{x}) = T_g(\mathbf{x}) + e_g$. Dann ist die Multiplikation der beiden Taylormodelle gegeben durch

$$(T_{fg}, I_{fg}) := (T_f T_g - \overline{T}_{fg}, \square E(\mathbf{x}, e_f, e_g))$$

wobei \overline{T}_{fg} die Terme des Produktes $T_f T_g$ enthält, deren Grad höher als n ist. Weiter sei $E(\mathbf{x}, e_f, e_g) := \overline{T}_{fg} + T_f e_g + T_g e_f + e_f e_g$ und $\square E(\mathbf{x}, e_f, e_g)$ bezeichne die Hülle von E auf $B \times I_f \times I_g$.

Die Qualität der Berechnung hängt stark von der Qualität der Einschließung des Polynoms E ab. Scharfe Einschließungen etwas mittels einer Entwicklung des Polynoms nach Tschebycheff- oder Bézierpolynomem und Einschließung der Tschebycheff-/Bézierpunkte zu berechnen ist kostspielig. Eine Auswertung mittels Horner Schema ist die schnellste Möglichkeit, verunschärft aber das Ergebnis.

C.3 Grundfunktionen

Zur Berechnung einer der Grundfunktionen Sinus, Cosinus, Exp, usw. mit einem Taylormodell als Argument existiert keine allgemeine Strategie. In den meisten Fällen kann aber folgendermaßen vorgegangen werden:

Sei (T_f, I_f) ein Taylormodell n -ter Ordnung für f über B und sei g eine der Grundfunktionen. Gesucht ist das Taylormodell für die Funktion $f \circ g$.

Ansatz:

$$1. \ c := T_f(\mathbf{x}_0), \quad \tilde{T}_f(\mathbf{x}) := T_f(\mathbf{x}) - c$$

2. Verwende ein Additionstheorem für g (z.B. $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$) um die Berechnung von c und $\tilde{T}_f(\mathbf{x}) + I_f$ zu trennen.
3. Berechne den konstanten Teil korrekt oder eine enge Einschließung desselben.
4. Berechne das Taylormodell für den nicht-konstanten Teil der Funktion $h(\tilde{T}_f(\mathbf{x}) + I_f)$. Das Restglied wird mit Standardintervallarithmetik ausgewertet.