Filter

Transformationen

(Blender)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

Wozu Filter?

Wozu Filter?

Beispiel 3

- Teil1: Filter anwenden (verschiedene Filter anwenden um diverse Effekte zu erzeugen)
- Teil2: Filterparameter bestimmen
  - Glättungsfilter (Blur)
  - Kanten/Ecken –Detektoren
  - Kanten/Ecken –Verstärkung
  - Schwellwertfilter (Threshold)
  - Uniforme Grauwerttransformation (Kontraständerung)

Glättungsfilter (Blur Filter)

- Ziel: Störungen/Rauschen reduzieren, eliminieren
- Nebenwirkungen:
  - Kanten verwischen
  - Unschärfe
- Filter:
  - Mittelwertfilter
  - Gaußfilter
  - Binomialfilter
  - Medianfilter

Mittelwertfilter (Box-Filter)

- Faltungskern
  - Alle Gewichte gleich
  - Summe = 1
- Bewirkt eine Glättung des Bildes

Mittelwertfilter (Box-Filter)

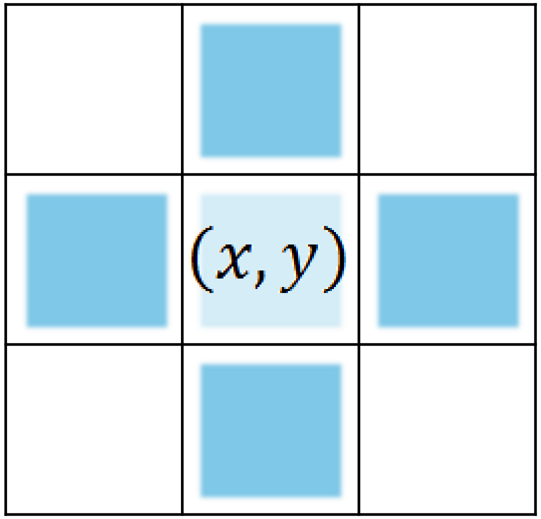
- Faltungskern
  - Alle Gewichte gleich
  - Summe = 1
- Bewirkt eine Glättung des Bildes

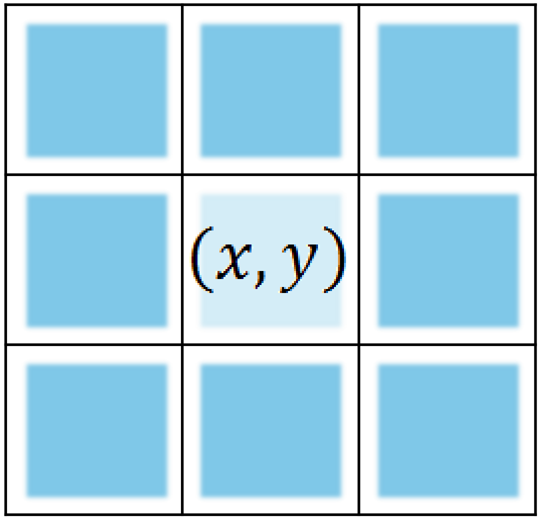
Beispiel: 3x3 Mittlwertfilter
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

- Auch andere Kernelgrößen sind möglich!

4-/8-Nachbarschaft

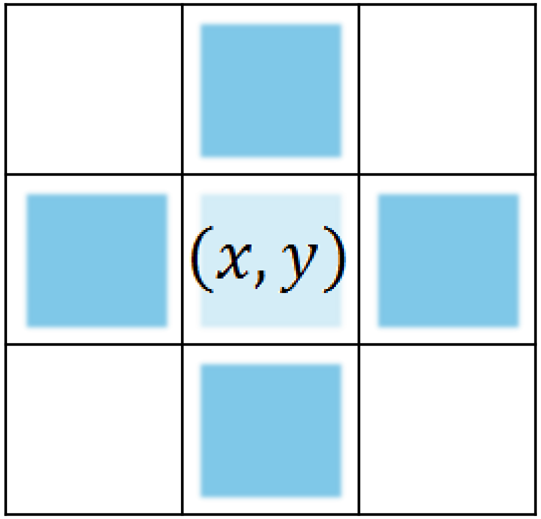
- Möglichkeiten in 2D:
  - **4-Nachbarschaft**
    - Nur Nachbaren mit gemeinsamen Kante
  - **8-Nachbarschaft**
    - Auch diagonale Nachbaren



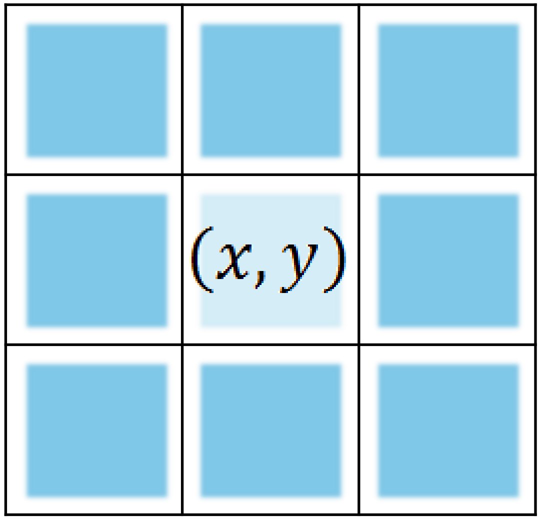


4-/8-Nachbarschaft Mittelwertfilter

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

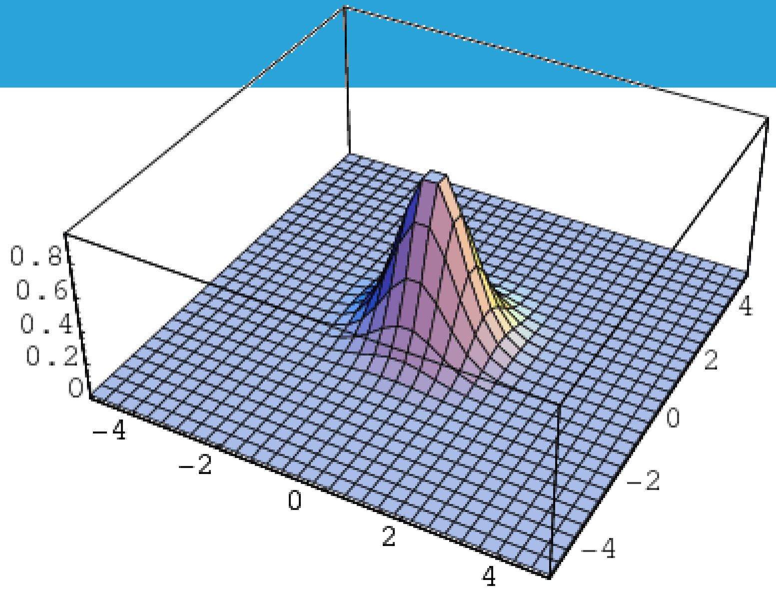


$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

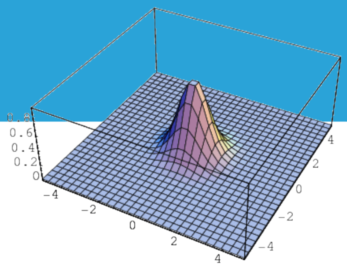


Gaußfilter

- Gewichtete Mittelung
- Reduziert Einfluss von weiter vom Filterzentrum entfernten Pixeln



Gaußfilter

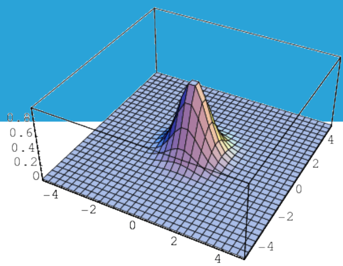


- Beispiel:

- Kernel: 5x5
- Sigma: 0,5

$$\begin{bmatrix} 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0117 & 0{,}0862 & 0{,}0117 & 0{,}0000 \\ 0{,}0002 & 0{,}0862 & 0{,}6366 & 0{,}0862 & 0{,}0002 \\ 0{,}0000 & 0{,}0117 & 0{,}0862 & 0{,}0117 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

Gaußfilter

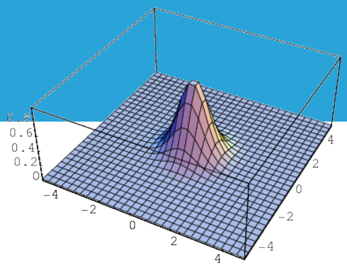


- Beispiel:
  - Kernel: 5x5
  - Sigma: ?

$$\begin{bmatrix} 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0117 & 0{,}0862 & 0{,}0117 & 0{,}0000 \\ 0{,}0002 & 0{,}0862 & 0{,}6366 & 0{,}0862 & 0{,}0002 \\ 0{,}0000 & 0{,}0117 & 0{,}0862 & 0{,}0117 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

- Berechne Sigma

Gaußfilter



- Beispiel:
  - Kernel: 5x5
  - Sigma: **?**

$$\begin{bmatrix} 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0117 & 0{,}0862 & 0{,}0117 & 0{,}0000 \\ 0{,}0002 & 0{,}0862 & 0{,}6366 & 0{,}0862 & 0{,}0002 \\ 0{,}0000 & 0{,}0117 & 0{,}0862 & 0{,}0117 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

- Berechne Sigma durch umformen und einsetzen vom Zentralpixel G(0,0) = 0,6366

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

wo für G(0,0)
x= 0, y = 0

Binomialfilter

- Gaußfilter-Approximation

- Beispiel: 3x3 Kernel:

$$\frac{1}{16} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Medianfilter

- Kein Kernel der mit dem Bild gefaltet wird!
- Ersetzung jedes Pixels durch den Median seiner Nachbarschaft

255	241	233
254	95	109
01	111	20

Medianfilter

- Kein Kernel der mit dem Bild gefaltet wird!
- Ersetzung jedes Pixels durch den Median seiner Nachbarschaft

255	241	233
254	95	109
01	111	20

  - 1. sortiere Grauwerte der Nachbarschaft:
    01, 20, 95, 109, 111, 233, 241, 254, 255.

Medianfilter

- Kein Kernel der mit dem Bild gefaltet wird!
- Ersetzung jedes Pixels durch den Median seiner Nachbarschaft

255	241	233
254	95	109
01	111	20

  - 1. sortiere Grauwerte der Nachbarschaft:
    01, 20, 95, 109, 111, 233, 241, 254, 255.
  - 2. Ergebnis = 111 (der mittlere Pixel)
    - Bei gerader Anzahl von Elementen wird Mittelwert der beiden Werte in der Mitte genommen.

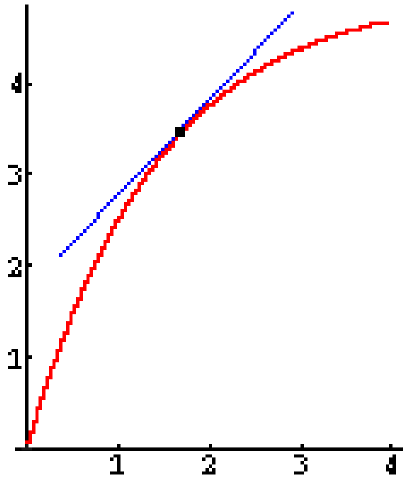
Medianfilter

- Eliminiert Ausreißer
  - (z.B. „Salz und Pfeffer -Rauschen“)
- Im Ergebnisbild entstehen keine neuen Grauwerte

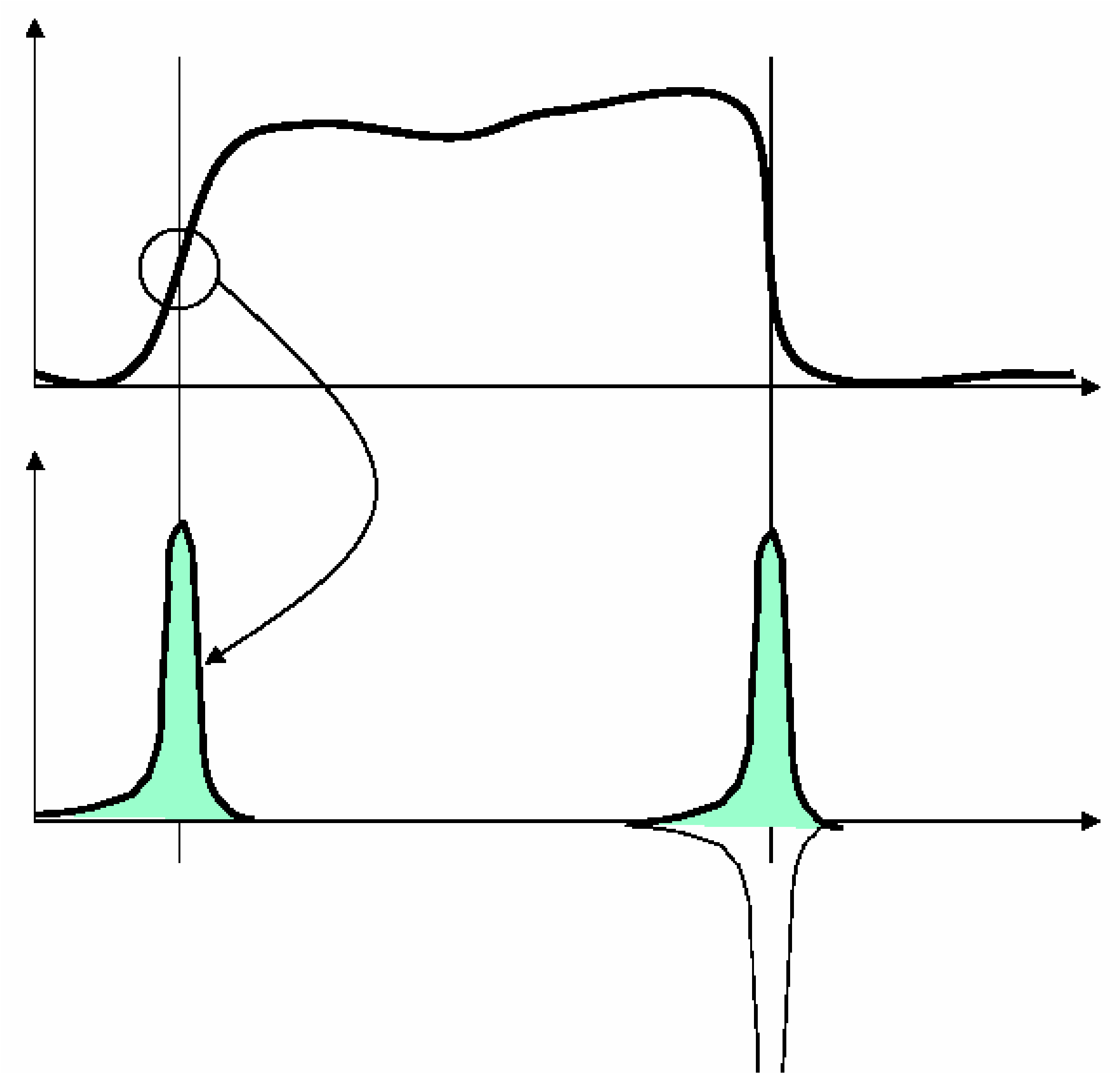
Kantendetektoren

Wiederholung: 1. und 2. Ableitung

- Die 1. Ableitung
  - Änderung des Funktionswertes
  - = Steigung an bestimmter Stelle
- Die 2. Ableitung
  - Änderung der Steigung
  - = Krümmung des Graphen
- Interpretation in der BV:
  - Ableitung zeigt in Richtung der größten Intensitäts-Änderung = Kanten



Wiederholung: 1. und 2. Ableitung



Funktion

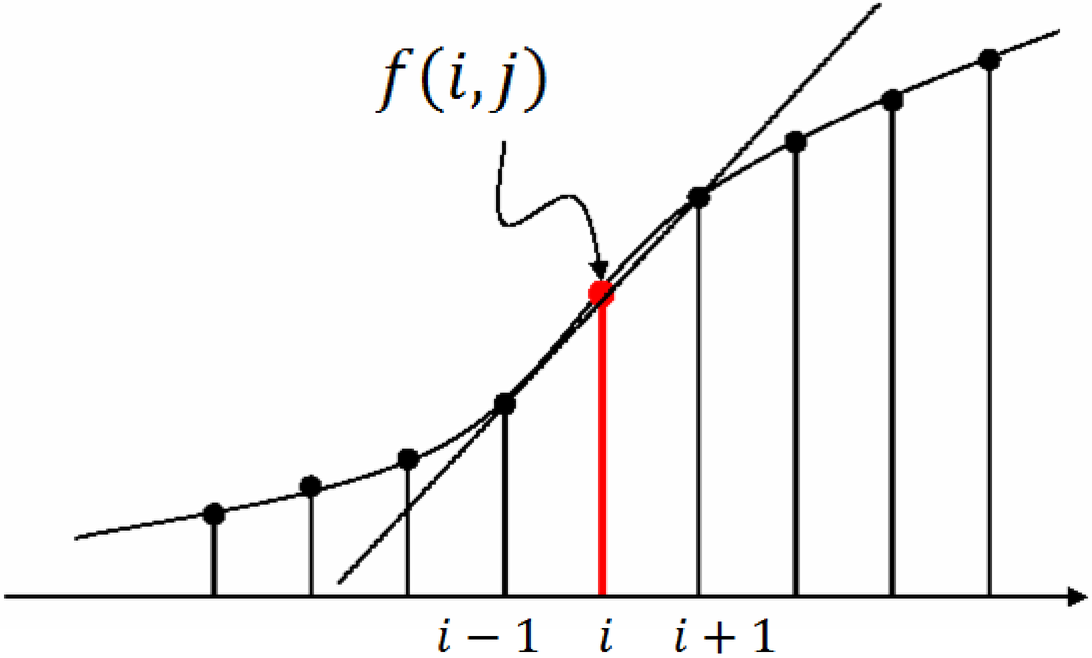
2. Ableitung

Wiederholung: 1. und 2. Ableitung

- Wie berechnet man die erste Ableitung?

$$\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix}$$



- Approximation durch $\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial i} \approx f(i,j) - f(i-1,j)$

Wiederholung: 1. und 2. Ableitung

- Die 1. Ableitung einer Funktion
  - groß für Bereiche mit starker Steigung
    - im Bild Bereiche mit großen Intensitäts-unterschieden, z.B.: Objektkanten
  - Klein für Bereiche mit geringer Steigung
    - im Bild homogene Flächen

Diskreter Laplace Operator

- = Summer der partiellen 2. Ableitungen

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- -> größte Intensitäts-Änderung in x- und y-Richtung

- Kantendetektor

Diskreter Laplace Operator

- Kernel

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diskreter Laplace Operator

- Kernel $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Verschiedene Variationen abhängig von
  - Approximation der Ableitungen
  - Gewünschte Filtergröße
  - Gewünschte Noise-Reduction

Diskreter Laplace Operator

- Kernel

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Verschiedene Variationen abhängig von
  - Approximation der Ableitungen
  - Gewünschte Filtergröße
  - Gewünschte Noise-Reduction

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Diskreter Laplace Operator

- Kernel

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Verschiedene Variationen abhängig von
  - Approximation der Ableitungen
  - Gewünschte Filtergröße
  - Gewünschte Noise-Reduction

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Eckendetektor

Diskreter Laplace Operator

- Kernel

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Eckendetektor

Eigenschaften

- Kanten/Ecken -Detektoren
  - Summe des Kernels = 0
- Kanten/Ecken -Verstärkung
  - Summe des Kernels >= 1

Eigenschaften

- Kanten/Ecken -Detektoren
  - Summe des Kernels = 0

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Kanten/Ecken -Verstärkung
  - Summe des Kernels >= 1

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Roberts Kantendetektor

- 2 kleine 2x2 Filter
  - schätzen den Gradienten der Diagonalen
- Sensibel auf diagonale Kanten
- Gering richtungsselektiv

$$G_x = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad G_y = \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Prewitt Kantendetektor

- 3x3 Filter
- Mittelung über 3 benachbarte Zeilen/Spalten
  - entspricht Glättung
- Sensibel auf vertikale und horizontale Kanten

$$\mathbf{G_x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G_y} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sobel Kantendetektor

- Ähnlich Prewitt, doch bei der Glättung wird mehr Gewicht auf die zentrale Zeile bzw. Spalte gelegt.

$$\mathbf{G}_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & +2 & +1 \end{bmatrix}$$

Kompass Kantendetektor

- Filter für mehrere Richtungen:
  {0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°}

$$G_{0^\circ} = F * \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 \\ -1 & -2 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

F … Bild

Kompass Kantendetektor

- Filter für mehrere Richtungen:
  {0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°}

$$G_{0^\circ} = F * \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 \\ -1 & -2 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \quad G_{45^\circ} = F * \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ -1 & -2 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

F … Bild

Kompass Kantendetektor

- Filter für mehrere Richtungen:
  {0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°}

$$G_{0^\circ} = F * \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 \\ -1 & -2 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \quad G_{45^\circ} = F * \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ -1 & -2 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$G_{90^\circ} = F * \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -2 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

F … Bild

Kompass Kantendetektor

- Filter für mehrere Richtungen:
  {0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°}

$$G_{0^\circ} = F * \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 \\ -1 & -2 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \quad G_{45^\circ} = F * \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ -1 & -2 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$G_{90^\circ} = F * \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -2 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad G_{135^\circ} = F * \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

F … Bild

Kompass Kantendetektor

- Filter für mehrere Richtungen:
  {0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°}

$$G_{0^\circ} = F * \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 \\ -1 & -2 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \quad G_{45^\circ} = F * \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ -1 & -2 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$G_{90^\circ} = F * \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -2 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad G_{135^\circ} = F * \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -2 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

F … Bild

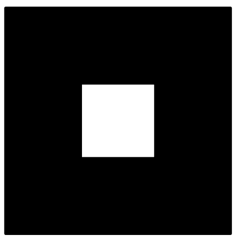
Filterparameter bestimmen

- Beispiel
- 1. durch hinschauen Filterkategorie bestimmen.

Filterparameter bestimmen

- 2. Kernelgröße und (positive) Elemente bestimmen

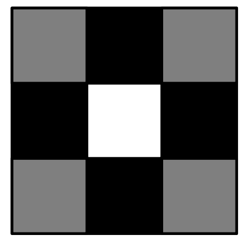
<u>Original</u>



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Schwarzer Bereich mit
1 weißen Pixel

<u>Gefiltertes Bild</u>



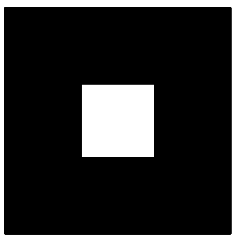
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

=> 3x3 Kernel

Filterparameter bestimmen

- 2. Kernelgröße und (positive) Elemente bestimmen

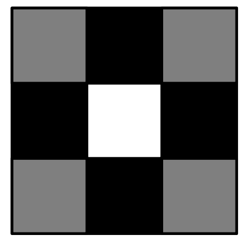
<u>Original</u>



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Schwarzer Bereich mit
1 weißen Pixel

<u>Gefiltertes Bild</u>



$$\begin{bmatrix} 1 & ? & 1 \\ ? & 8 & ? \\ 1 & ? & 1 \end{bmatrix}$$

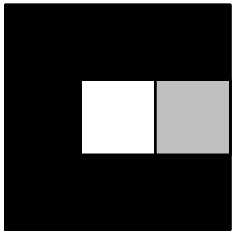
=> 3x3 Kernel

- Kantendetektor: Summe des Kernels = 0
- => Kernel muss negative Elemente haben, Bilder haben aber keine negativen Werte (werden auf 0 gesetzt).

Filterparameter bestimmen

- 3. Negative Elemente berechnen

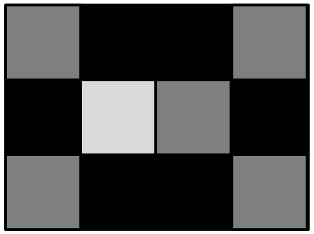
Original



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Schwarzer Bereich mit
1 weißen und 1 grauen
Pixel

Gefiltertes Bild



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,7 \\ 0 & 5,9 & 2,6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Filterparameter bestimmen

- 3. Negative Elemente berechnen

<u>Original</u> <u>Filter</u> <u>Gefiltertes Bild</u>

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & ? & 1 \\ ? & 8 & x \\ 1 & ? & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 5{,}9 & 2{,}6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

Filterparameter bestimmen

- 3. Negative Elemente berechnen

<u>Original</u> <u>Filter</u> <u>Gefiltertes Bild</u>

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & ? & 1 \\ ? & 8 & x \\ 1 & ? & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 5{,}9 & 2{,}6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

$1*8 + 0{,}7*x$

$= 5{,}9$

$\Rightarrow \quad x = -3$

Filterparameter bestimmen

- 3. Negative Elemente berechnen

<u>Original</u> <u>Filter</u> <u>Gefiltertes Bild</u>

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & ? & 1 \\ ? & 8 & x \\ 1 & ? & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,7 \\ 0 & 5,9 & 2,6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Für alle unbekannten Werte wiederholen!

1*8 + 0,7*x

= 5,9

=> x = - 3

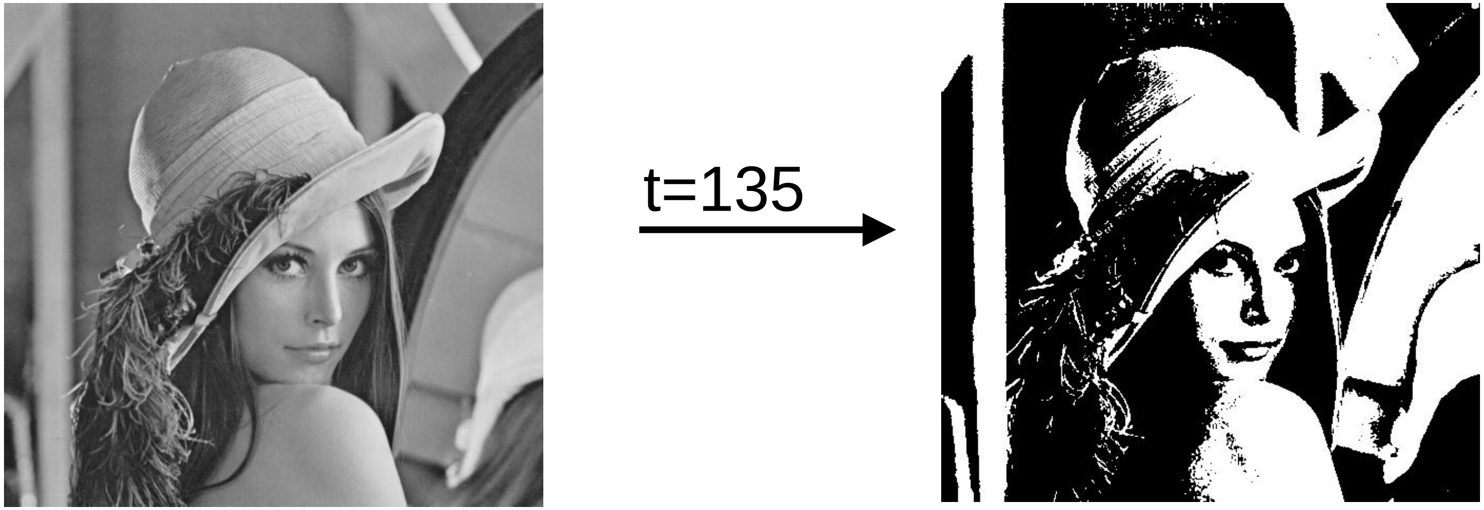
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Schwellwertfilter

- Erzeugt aus einem Grauwertbild ein Binärbild.
- Bei gewähltem Schwellwert ***t*** gilt für jeden Pixel I(x,y):
  - I(x,y) = 0 falls I(x,y) <= t
  - I(x,y) = 1 falls I(x,y) > t

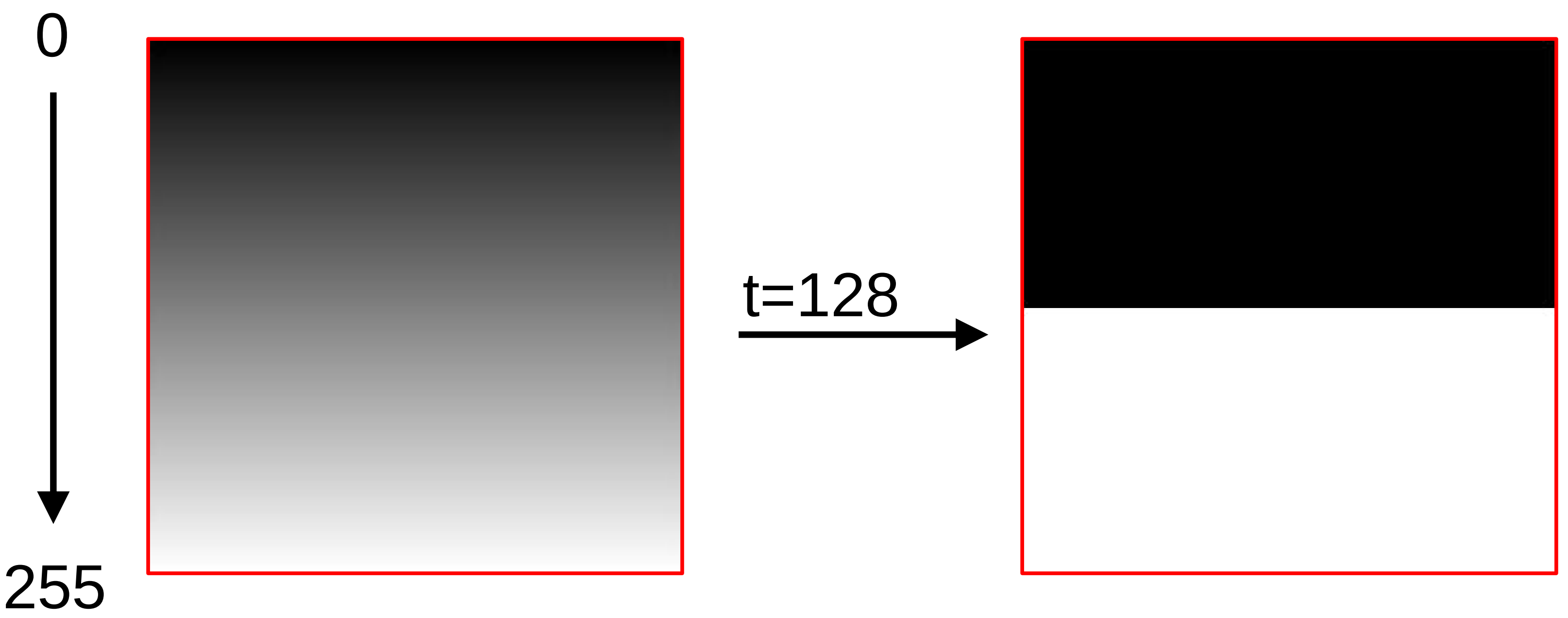
Schwellwertfilter

- Erzeugt aus einem Grauwertbild ein Binärbild.
- Bei gewähltem Schwellwert ***t*** gilt für jeden Pixel I(x,y):
  - I(x,y) = 0 falls I(x,y) <= t
  - I(x,y) = 1 falls I(x,y) > t



Schwellwertfilter

- Bestimmen des Schwellwerts mittels Gradientenbild
  - Jede Bildzeile bzw. jeder Pixel ein Grauwert
  - Gradientenbild als Input → Schwellwert t aus Output direkt „ablesbar“



Uniforme Grauwerttransformation

- Histogrammabschneidung (histogram clipping)

- Histogrammspreizung / -stauchung

Uniforme Grauwerttransformation

- Histogrammabschneidung
  - Intervall [x,y] bleibt erhalten
  - Intensität < x = 0 und Intensität > y = 1
  - Erkennt man mit Gradientenbild
- Beispiel:

x=70

y=200

Uniforme Grauwerttransformation

- Histogrammspreizung / -stauchung
  - Stauchung von [0,255] im Input zu z.B. [70,200] im Output (Test mit Gradientenbild)
  - Spreizung von z.B. [70,200] im Input zu [0,255] im Output (Test mit 2 Grauwerten im Input und Intervallgrenzen aus Output ablesen)
  - Achtung: nicht mit Clipping verwechseln! Änderung aller Grauwerte vs. Änderung des maximalen/minimalen Grauwerts

Uniforme Grauwerttransformation

- Histogrammspreizung / -stauchung
  - Stauchung

- Beispiel:

x:
0 -> 70

y:
255 -> 200

Uniforme Grauwerttransformation

- Histogrammspreizung / -stauchung
  - Spreizung

- Beispiel

x:
70 -> 0

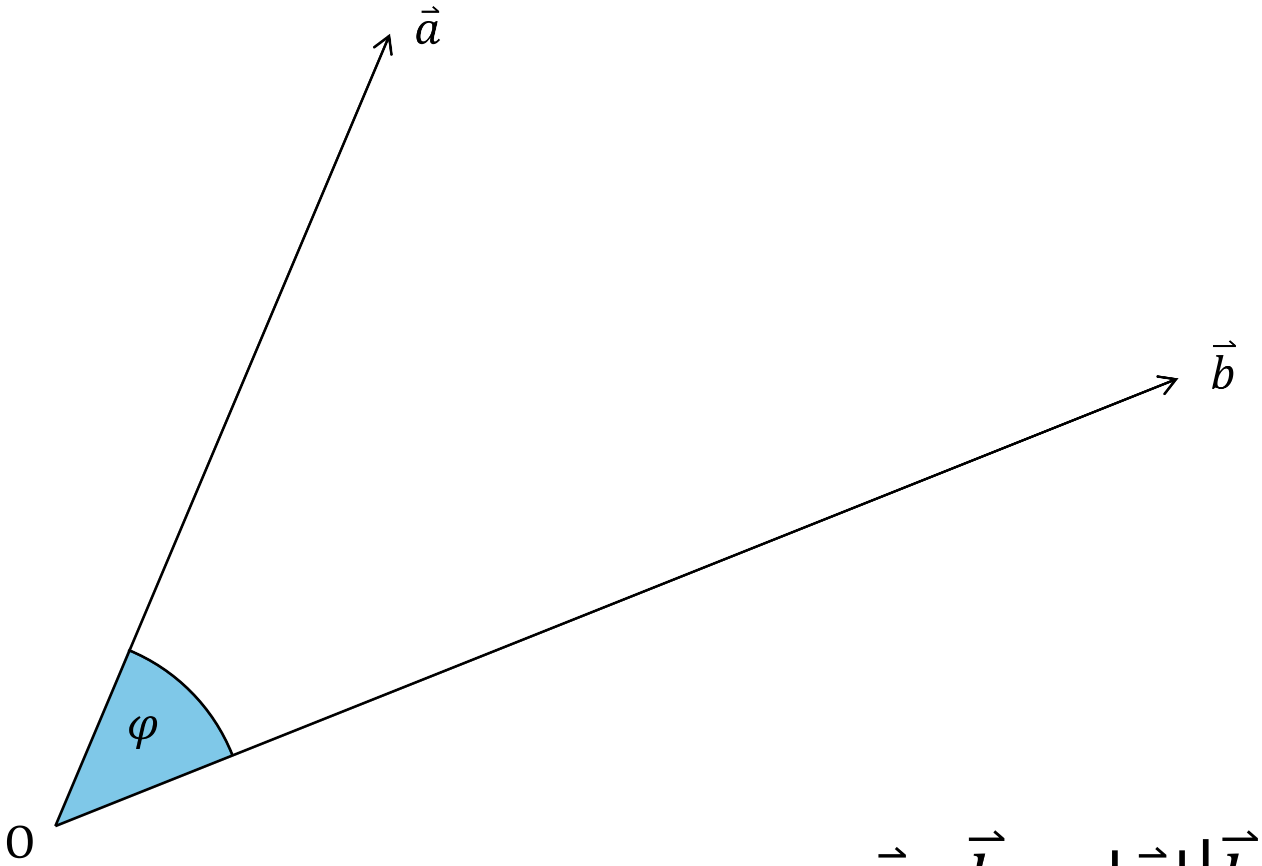
y:
200 -> 255

Filter ✓

Transformationen

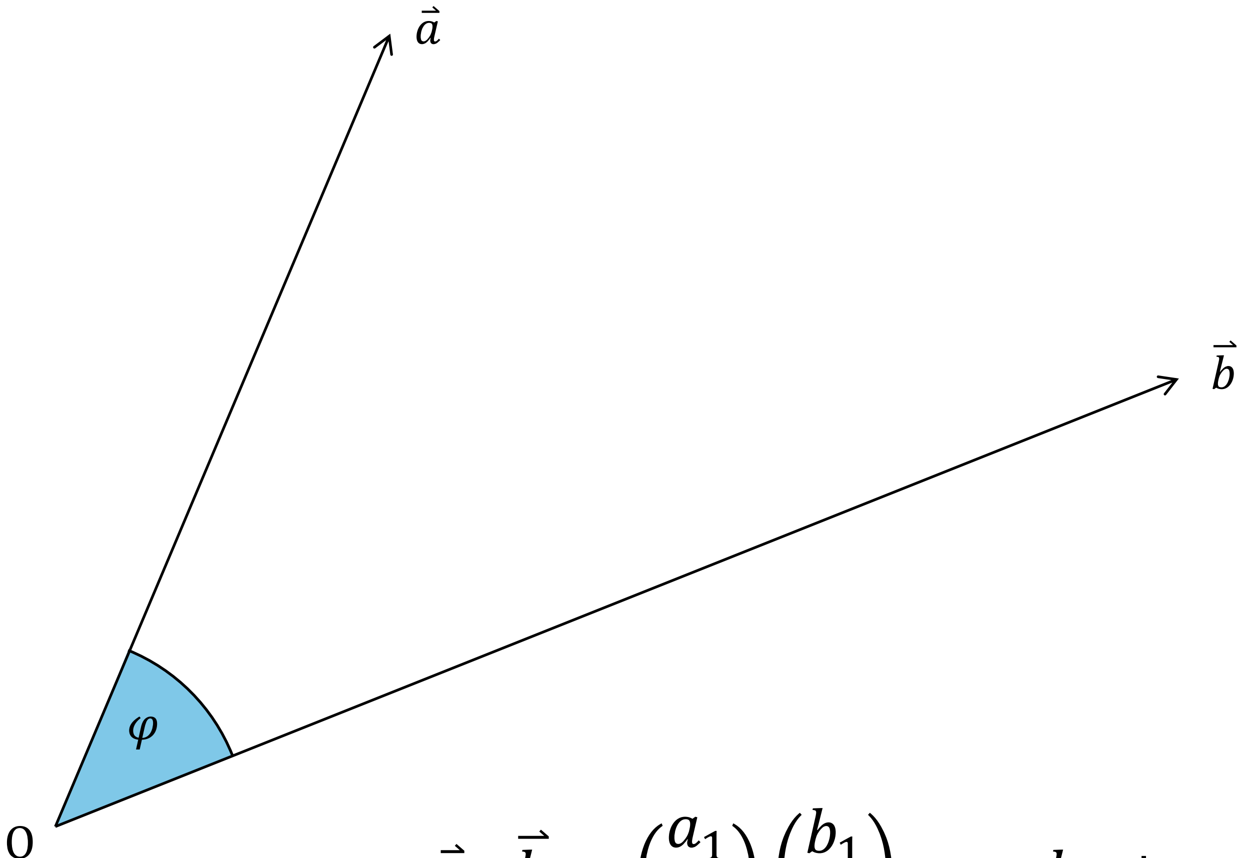
(Blender)

Dot Product



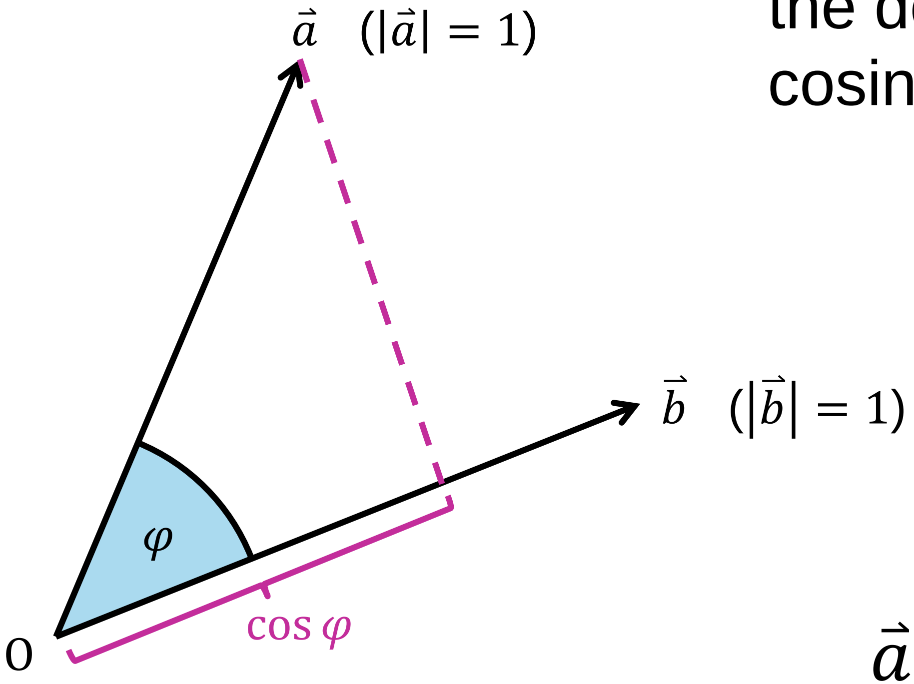
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos \varphi$$

Dot Product



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| \left| \vec{b} \right| \cos \varphi$$

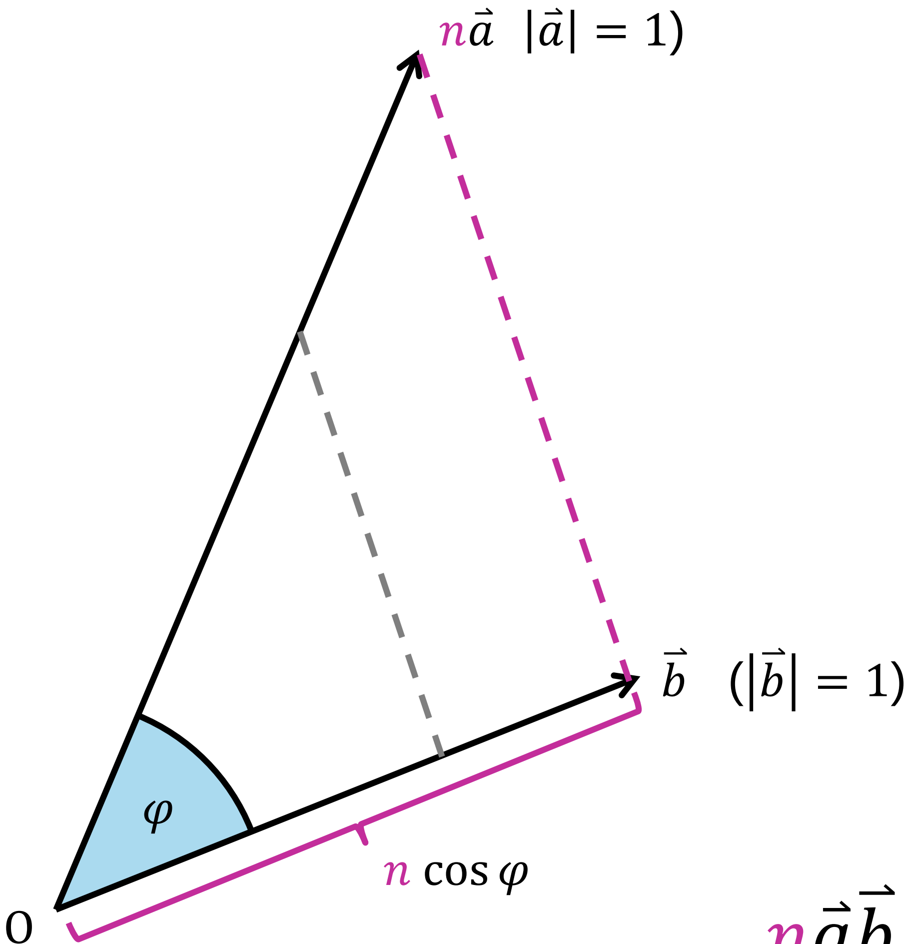
Dot Product



If $\vec{a}$ **and** $\vec{b}$ have length 1, the dot product is the cosine of the angle.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\varphi$$

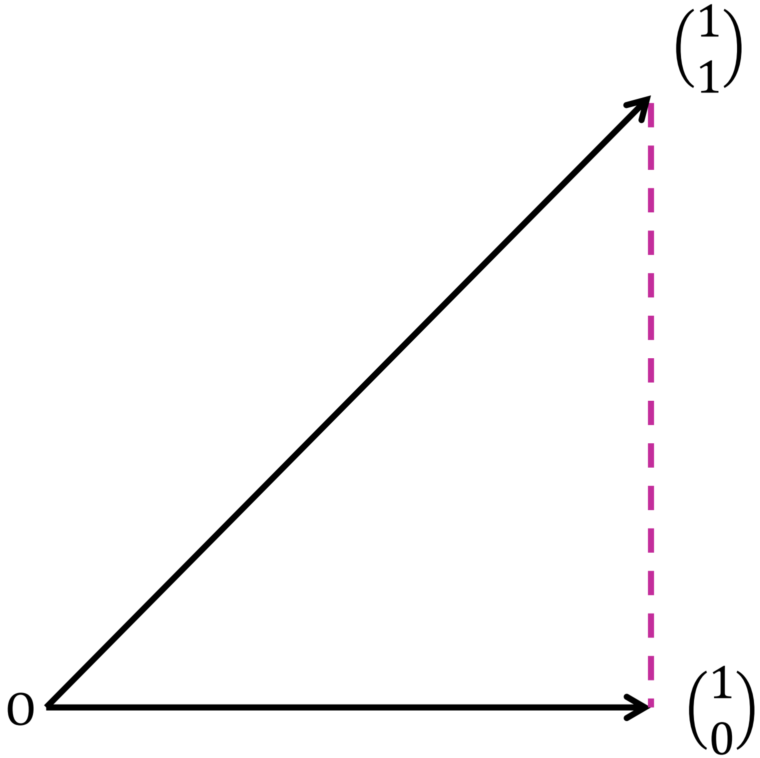
Dot Product



$$n\vec{a}\vec{b} = n\cos\varphi$$

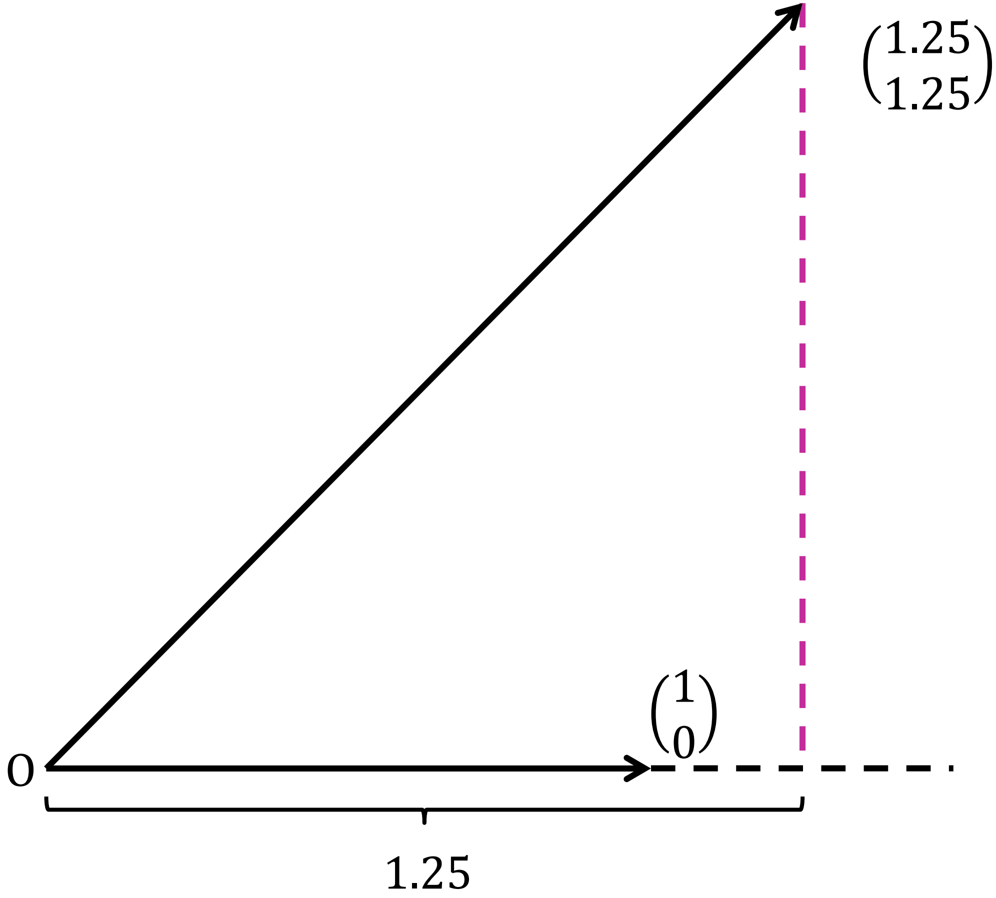
What does this mean in practice?

Excample 1



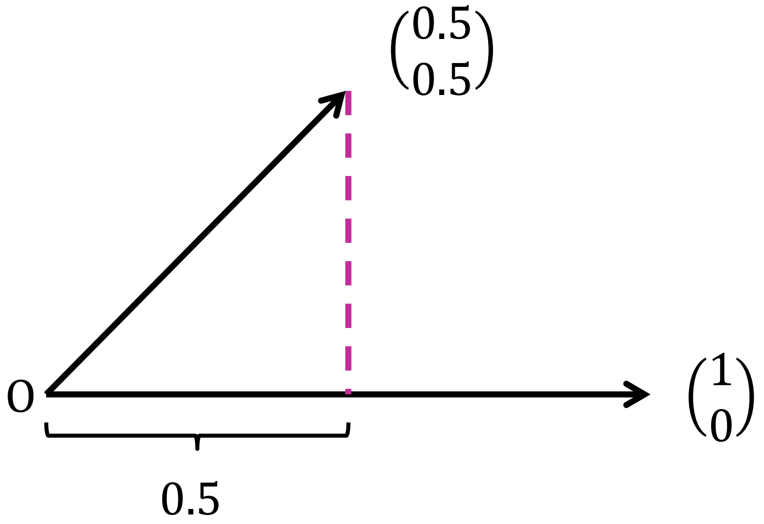
$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times 0 = 1$$

Excample 2



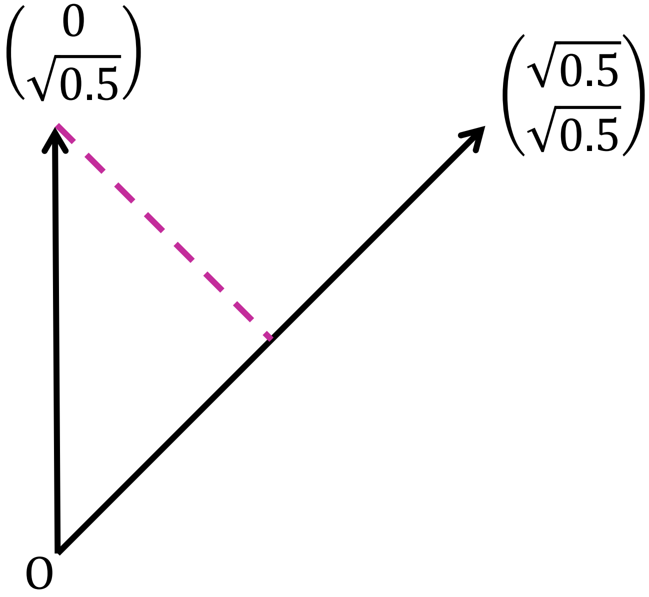
$$\begin{pmatrix}1.25\\1.25\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1.25 \times 1 + 1.25 \times 0 = 1.25$$

Excample 3



$$\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0.5 \times 1 + 0.5 \times 0 = 0.5$$

Excample 4

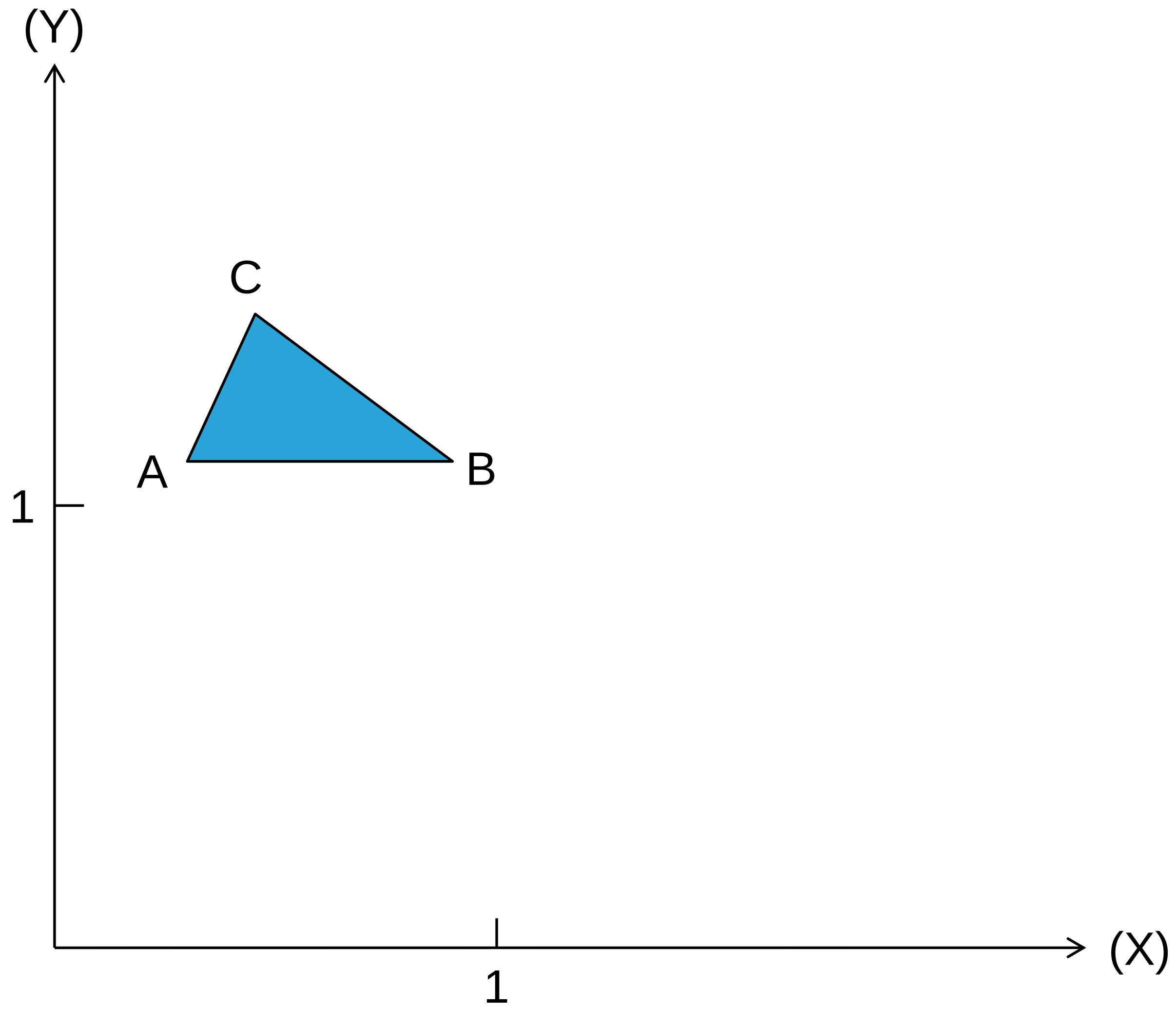


$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{0.5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{0.5} \times \sqrt{0.5} + 0 \times \sqrt{0.5} = 0.5$$

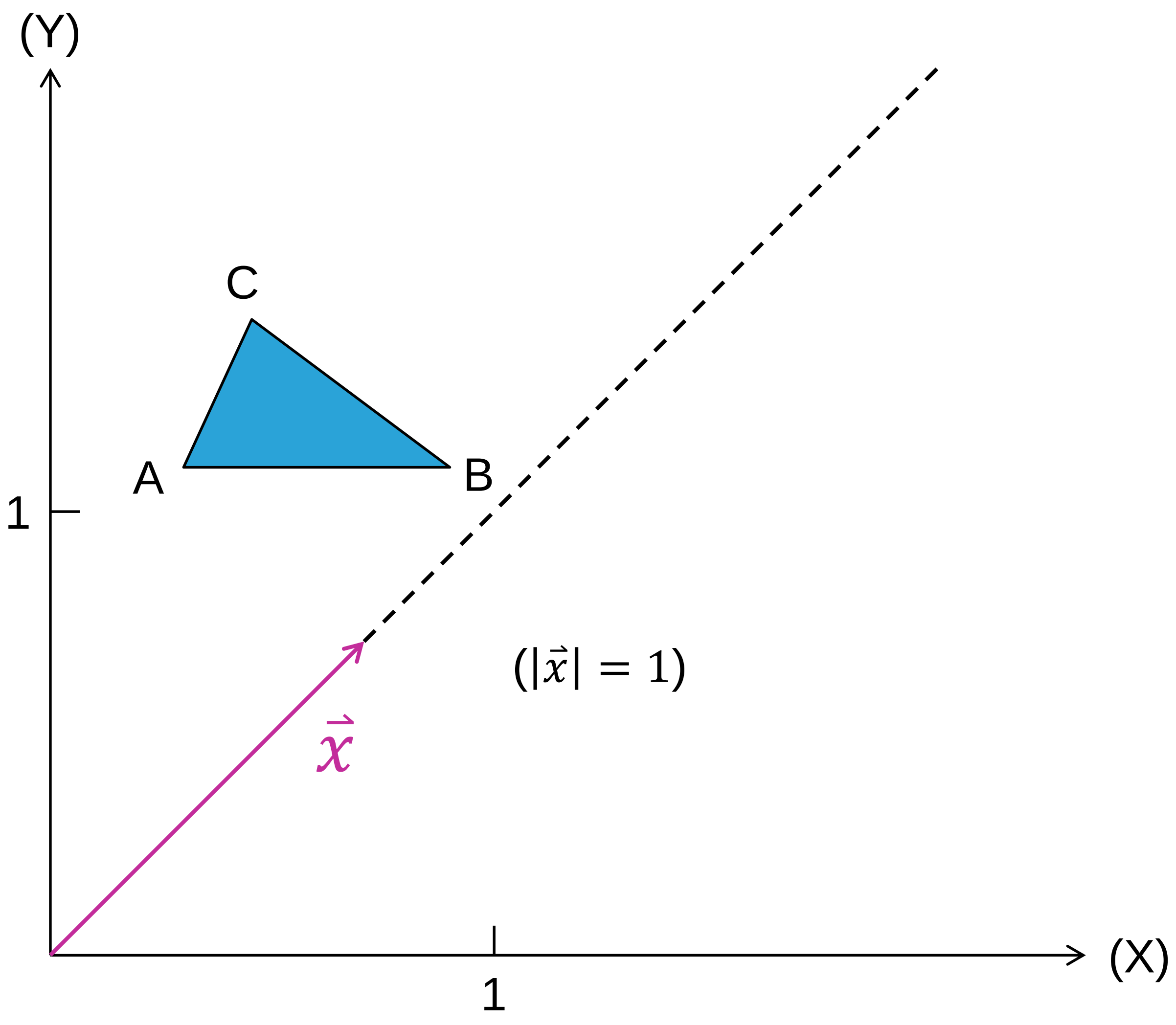
If one of the vectors has length 1, the result of the dot product is an orthogonal projection.

We can use this fact to accomplish rotations around the origin.

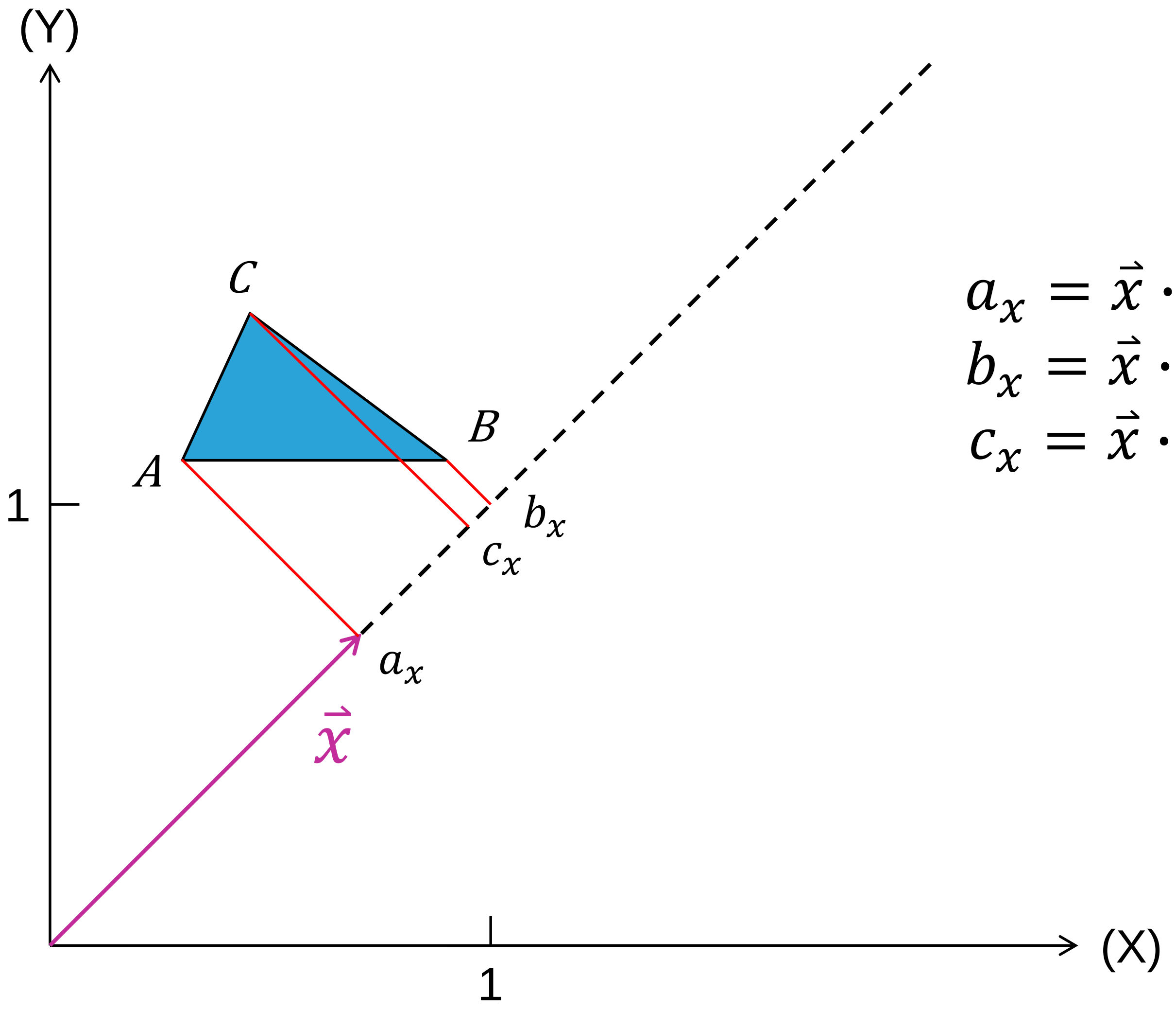
Triangle in a Cartesian Coordinate System



Orthogonal Projection on an Axis

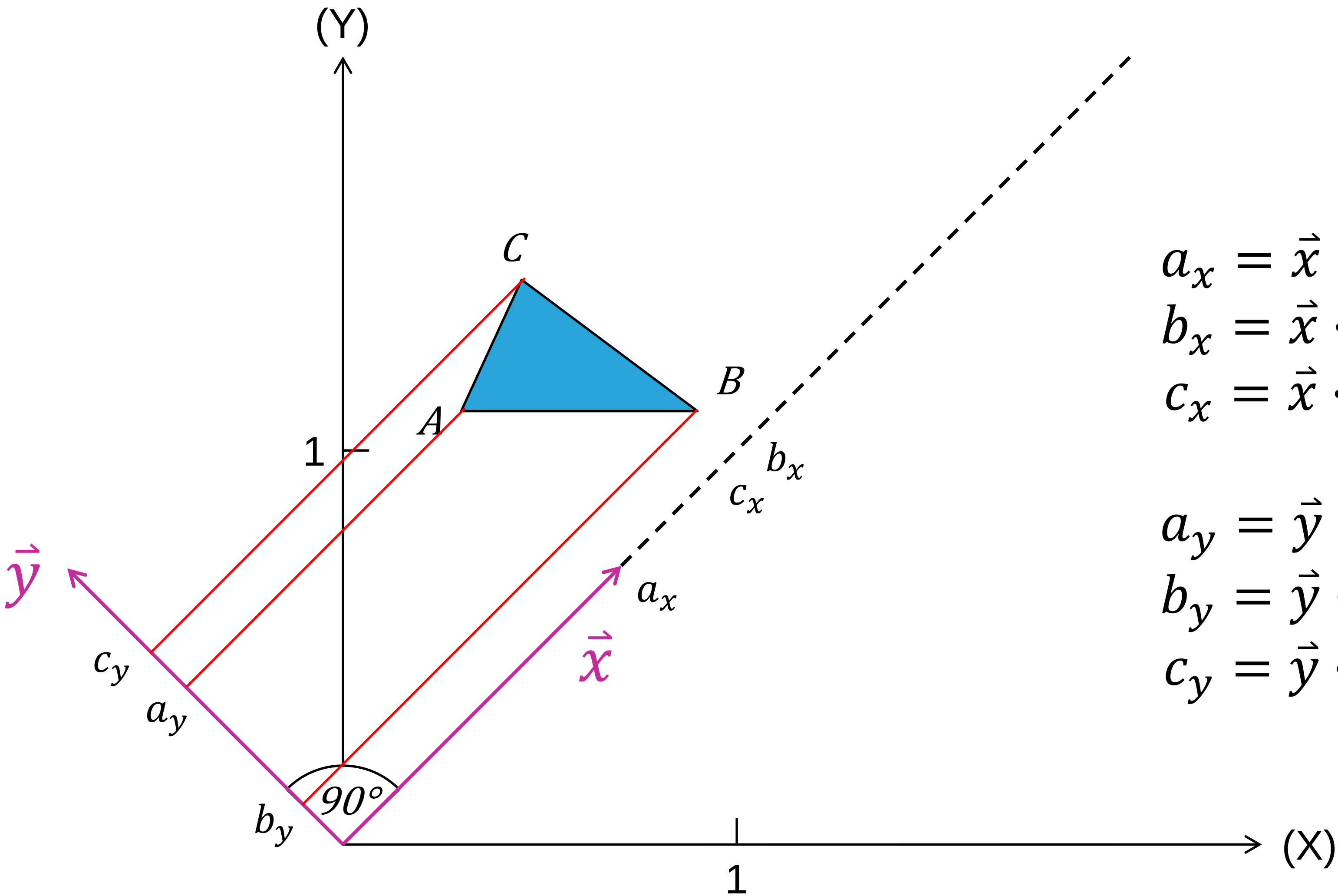


Orthogonal Projection on an Axis



$$a_x = \vec{x} \cdot A$$
$$b_x = \vec{x} \cdot B$$
$$c_x = \vec{x} \cdot C$$

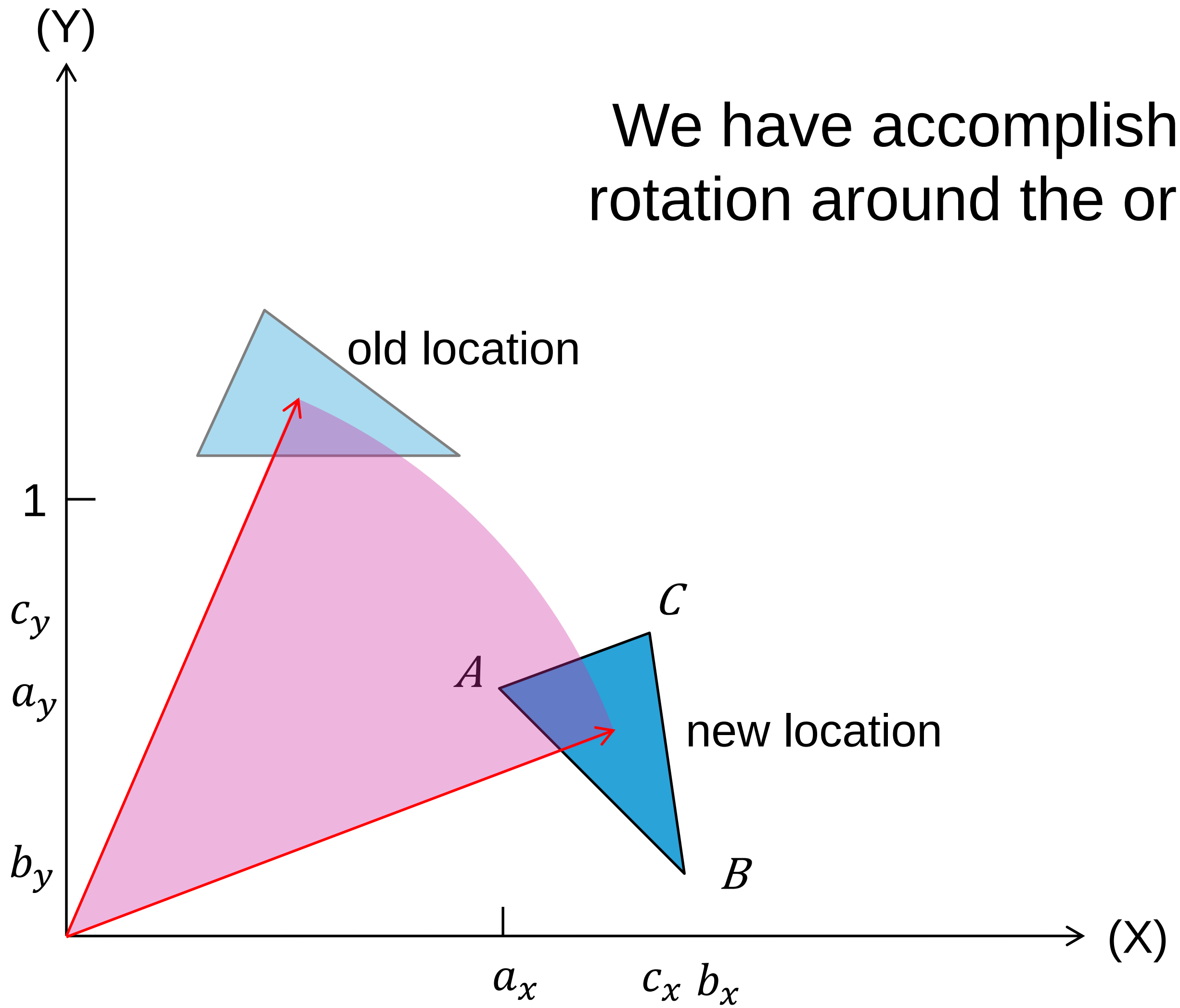
Orthogonal Projection on a Second Axis



$$a_x = \vec{x} \cdot A$$
$$b_x = \vec{x} \cdot B$$
$$c_x = \vec{x} \cdot C$$

$$a_y = \vec{y} \cdot A$$
$$b_y = \vec{y} \cdot B$$
$$c_y = \vec{y} \cdot C$$

Use $a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y$ as New Coordinates



We have accomplished a rotation around the origin!!!

Compact Representation of Rotations

$$a_x = \vec{x} \cdot A$$
$$b_x = \vec{x} \cdot B$$
$$c_x = \vec{x} \cdot C$$

$$a_y = \vec{y} \cdot A$$
$$b_y = \vec{y} \cdot B$$
$$c_y = \vec{y} \cdot C$$

Compact Representation of Rotations

$$a_x = \vec{x} \cdot A$$
$$b_x = \vec{x} \cdot B$$
$$c_x = \vec{x} \cdot C$$

$$a_y = \vec{y} \cdot A$$
$$b_y = \vec{y} \cdot B$$
$$c_y = \vec{y} \cdot C$$

$$a_x = \vec{x} \cdot A$$
$$a_y = \vec{y} \cdot A$$

$$b_x = \vec{x} \cdot B$$
$$b_y = \vec{y} \cdot B$$

$$c_x = \vec{x} \cdot C$$
$$c_y = \vec{y} \cdot C$$

Compact Representation of Rotations

$$a_x = \vec{x} \cdot A$$
$$b_x = \vec{x} \cdot B$$
$$c_x = \vec{x} \cdot C$$

$$a_y = \vec{y} \cdot A$$
$$b_y = \vec{y} \cdot B$$
$$c_y = \vec{y} \cdot C$$

$$a_x = \vec{x} \cdot A$$
$$a_y = \vec{y} \cdot A$$

$$b_x = \vec{x} \cdot B$$
$$b_y = \vec{y} \cdot B$$

$$c_x = \vec{x} \cdot C$$
$$c_y = \vec{y} \cdot C$$

matrix notation

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} A$$

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} B$$

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} C$$

Rotation Matrix

"x-axis" of the rotation

point

$$\underbrace{A'}_{\substack{\text{rotated}\\\text{point}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\vec{x}} \\ \boxed{\vec{y}} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{rotation}\\\text{matrix}}} A$$

"y-axis" of the rotation

Rotation Matrix

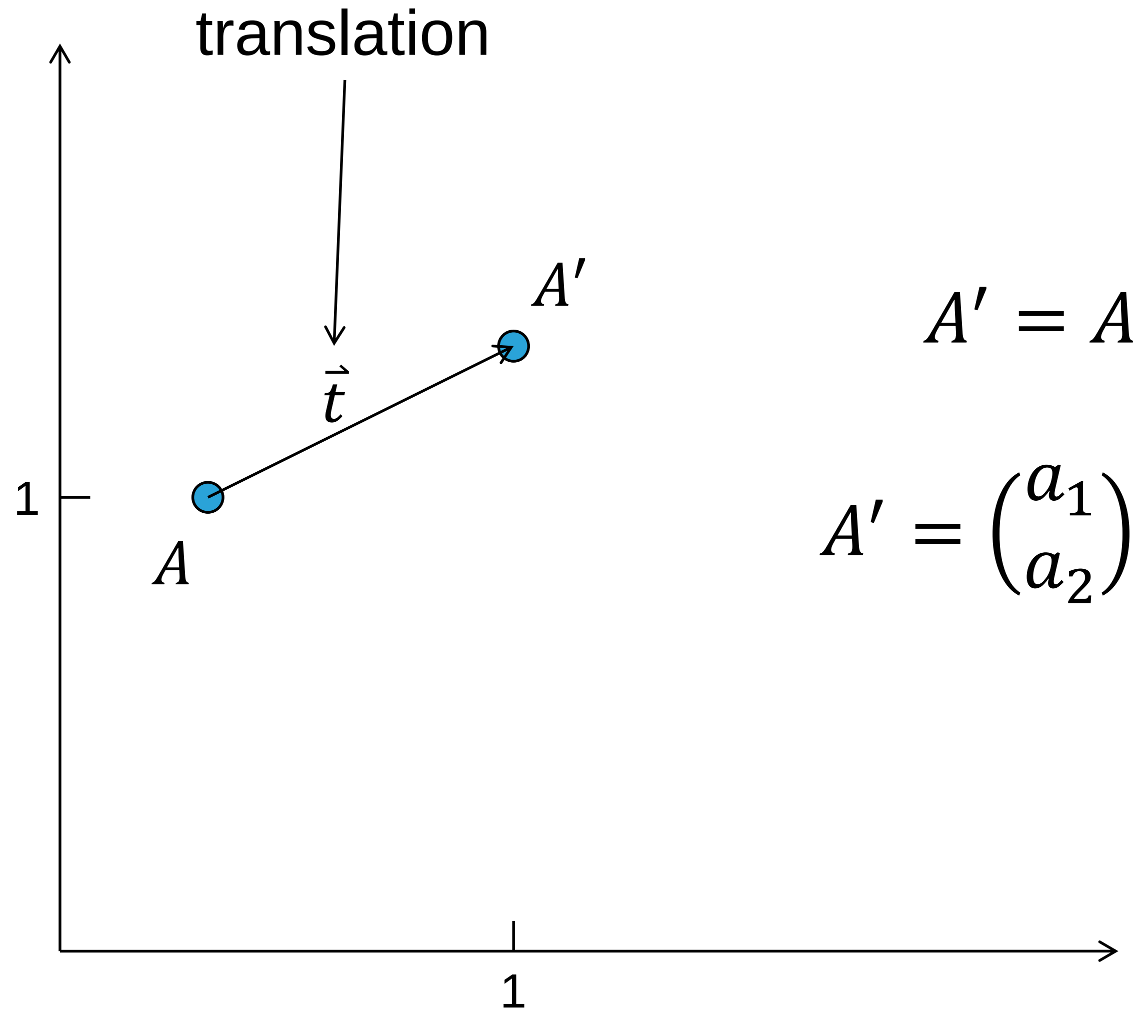
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Rotation Matrix

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_1 + x_2 a_2 \\ y_1 a_1 + y_2 a_2 \end{pmatrix}$$

What about translations?

Translate a Point



$$A' = A + \vec{t}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{t_1} \\ \boxed{t_2} \end{pmatrix}$$

Rotation + Translation

First Rotate Then Translate

$$1)\ A' = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} A$$

$$2)\ A'' = A' + \vec{t}$$

In one Step

$$A'' = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} A + \vec{t}$$

In one Step

$$A'' = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} A + \vec{t}$$

$$A'' = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

In one Step

$$A'' = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} A + \vec{t}$$

$$A'' = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} x_1 a_1 + x_2 a_2 + t_1 \\ y_1 a_1 + y_2 a_2 + t_2 \end{pmatrix}$$

In one Step

$$A'' = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} A + \vec{t}$$

$$A'' = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} x_1 a_1 + x_2 a_2 + t_1 \\ y_1 a_1 + y_2 a_2 + t_2 \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} x_1 a_1 + x_2 a_2 + t_1 1 \\ y_1 a_1 + y_2 a_2 + t_2 1 \end{pmatrix}$$

In one Step

$$A'' = \begin{bmatrix}\vec{x} \\ \vec{y}\end{bmatrix} A + \vec{t}$$

$$A'' = \begin{bmatrix}\vec{x} \\ \vec{y}\end{bmatrix} \begin{pmatrix}a_1 \\ a_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t_1 \\ t_2\end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix}x_1 a_1 + x_2 a_2 + t_1 \\ y_1 a_1 + y_2 a_2 + t_2\end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix}x_1 a_1 + x_2 a_2 + t_1 1 \\ y_1 a_1 + y_2 a_2 + t_2 1\end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & t_1 \\ y_1 & y_2 & t_2\end{bmatrix} \begin{pmatrix}a_1 \\ a_2 \\ 1\end{pmatrix}$$

homogeneous coordinate

One Last Thing

$$A'' = \begin{pmatrix} a_1'' \\ a_2'' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & t_1 \\ y_1 & y_2 & t_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1x2 vector

1x3 vector

$$\begin{pmatrix} a_1'' \\ a_2'' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & t_1 \\ y_1 & y_2 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{rotation+translation matrix}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrices for 2D and 3D

For 2D:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & t_1 \\ y_1 & y_2 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

For 3D:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & t_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & t_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Filter ✓

Transformationen ✓

(Blender)